

Notas em Análise Complexa

Gabriel E. Pires

1998

Conteúdo

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Integração | 5 |
| 1.1 | Teorema de Cauchy | 9 |
| 1.2 | Consequências do Teorema de Cauchy | 14 |
| 1.3 | Índice de um Caminho Fechado | 14 |
| 1.4 | Fórmulas Integrais de Cauchy | 17 |
| 1.5 | Teorema de Morera | 19 |
| 1.6 | Teorema de Liouville | 19 |
| 1.7 | Teorema Fundamental da Álgebra | 20 |
| 1.8 | Zeros de Funções Analíticas | 20 |
| 1.9 | Teorema do Módulo Máximo | 21 |
| 1.10 | Exercícios | 23 |
| 2 | Singularidades | 25 |
| 2.1 | Classificação | 25 |
| 2.2 | Série de Laurent | 27 |
| 2.3 | Exercícios | 35 |
| 3 | Resíduos e Aplicações | 37 |
| 3.1 | Teorema dos Resíduos | 37 |
| 3.2 | Zeros e Polos | 38 |
| 3.3 | Cálculo de Resíduos | 40 |
| 3.4 | Cálculo de Integrais e de Séries | 42 |
| 3.5 | Exercícios | 60 |

Capítulo 1

Integração

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho seccionalmente regular (cf. [5], [2], [6]). Seja γ^* a imagem do caminho γ , $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto tal que $\gamma^* \subset S$ e seja $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Então as funções $\operatorname{Re}(f \circ \gamma)\gamma'$ e $\operatorname{Im}(f \circ \gamma)\gamma'$ serão seccionalmente contínuas no intervalo $[a, b]$ e, portanto, integráveis em $[a, b]$. Assim, define-se integral de f ao longo do caminho γ da forma seguinte:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt + i \int_a^b \operatorname{Im}[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt \end{aligned} \quad (1.0.1)$$

Lema 1.0.0.1 *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho seccionalmente regular e $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua.*

1. $\int_{-\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$.
2. *Seja $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ uma função de classe C^1 com derivada positiva e seja $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ uma reparametrização. Então, $\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$.*
3. *Para $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ tem-se, $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$.*

Dem.:

1. Basta ter em conta o facto de que (ver figura [1.0.1])

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$$

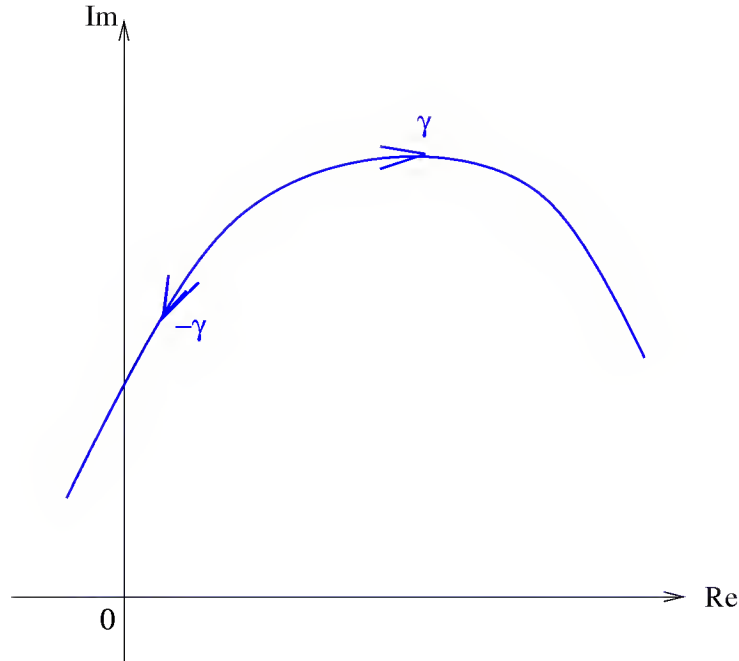


Figura 1.0.1: Mudança de sentido num caminho

2. Efectuando a mudança de variável $t = \psi(s)$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\psi(s))) \gamma'(\psi(s)) \psi'(s) ds \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) ds \\
 &= \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz
 \end{aligned}$$

3. Por reparametrização, podemos considerar γ_1 e γ_2 definidos no intervalo $[0, 1]$ e, portanto, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, também designado por concatenação de γ_1 e de γ_2 , (ver figura 1.0.2), é dado por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

donde se obtém,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(\gamma_1(2t)) \gamma_1'(2t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\gamma_2(2t - 1)) \gamma_2'(2t - 1) dt \\
 &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz
 \end{aligned}$$

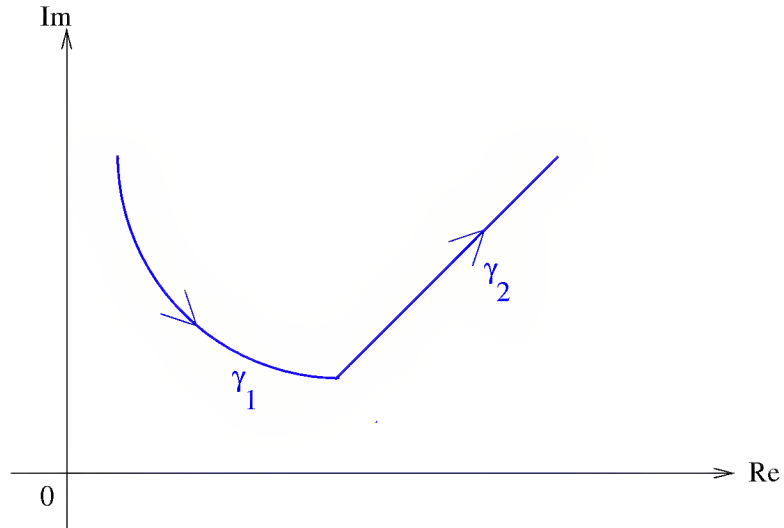


Figura 1.0.2: Concatenação de dois caminhos

□

Exemplo:

- Seja $r > 0$ e $\gamma(t) = re^{it}$, $(t \in [0, 2\pi])$ a parametrização de uma circunferência de raio r , centrada na origem e percorrida no sentido directo como mostra a Figura [1.0.3](#)

Então,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n i r e^{it} dt \\
 &= i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\
 &= i r^{n+1} \left[\int_0^{2\pi} \cos(n+1)t dt + i \int_0^{2\pi} \sin(n+1)t dt \right] \\
 &= \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \quad (1.0.2)
 \end{aligned}$$

Teorema 1.0.1 *Seja γ um caminho seccionalmente regular, $S \subset \mathbb{C}$ um aberto tal que $\gamma^* \subset S$ e $F : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe C^1 . Então,*

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

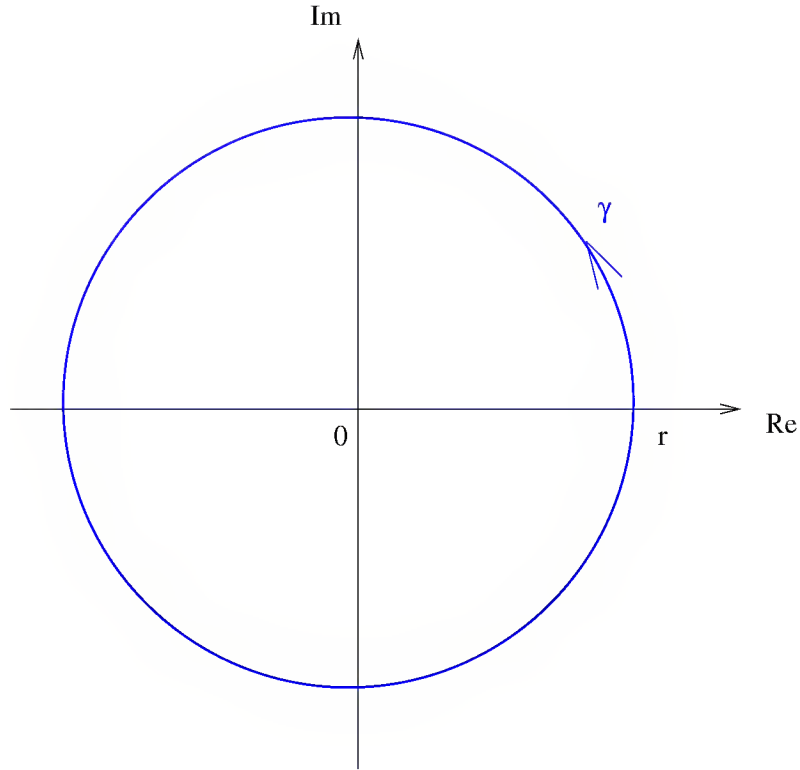


Figura 1.0.3: Circunferência de raio r e centro na origem

Dem.: (cf. [5]) Consideremos apenas o caso em que γ é regular. Para o caso em que γ é seccionalmente regular basta ter em conta a propriedade 3. do Lema [1.0.0.1].

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F'(z) dz &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt \\
 &= [\operatorname{Re}(F \circ \gamma)(t)]_a^b + i [\operatorname{Im}(F \circ \gamma)(t)]_a^b \\
 &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))
 \end{aligned}$$

□

Este é o chamado Teorema Fundamental do Cálculo. A sua aplicação exige o conhecimento da primitiva da função a integrar o que, em muitos casos, não é simples. No entanto, temos a seguinte estimativa para o módulo do integral de uma função contínua:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = Ml(\gamma) \quad (1.0.3)$$

em que M é o máximo da função $|f|$ em γ^* e $l(\gamma)$ é o comprimento da linha parametrizada por γ .

De facto, sendo $\int_{\gamma} f(z)dz = re^{i\theta}$ a representação polar do integral de f ao longo de γ , obtemos,

$$\begin{aligned}
 r = e^{-i\theta} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} e^{-i\theta} f(z)dz \\
 &= \int_a^b \{ \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)] + i \operatorname{Im}[e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)] \} dt \\
 &= \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)] dt \\
 &\leq \int_a^b | \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)] | dt \\
 &\leq \int_a^b |e^{-i\theta}| |f(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \\
 &= \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \\
 &= \int_{\gamma} |f(z)| dz \leq Ml(\gamma)
 \end{aligned}$$

Exemplos:

- Seja $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ e $\gamma(t) = Re^{it}$, ($0 \leq t \leq \pi$). Então,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_0^{\pi} \left| \frac{Rie^{it}}{R^4e^{i4t} + 1} \right| dt \leq \frac{R\pi}{|R^4 - 1|}$$

- $f(z) = \frac{1}{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, ($0 \leq t \leq 2\pi$). Então, $|f(\gamma(t))| = 1$ e $|\gamma'(t)| = 1$ e, portanto,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq 2\pi$$

1.1 Teorema de Cauchy

O teorema de Cauchy é um dos resultados fundamentais na teoria das funções analíticas e pode ser apresentado sob diversas formas (cf. [6] [1] [2] [5]). Nesta secção estudaremos uma de tais versões que é suficiente para grande parte das aplicações.

Seja $\Delta \subset \mathbb{C}$ um triângulo com vértices $\{a, b, c\}$. Dada uma função contínua na fronteira do triângulo $\partial\Delta$, pela propriedade 3. do Lema 1.0.0.1 obtemos

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[b,c]} f(z)dz + \int_{[c,a]} f(z)dz$$

em que $[x, y]$ designa o segmento de recta percorrido de x para y .

Lema 1.1.0.1 *Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $\Delta \subset S$ um triângulo fechado e f uma função analítica em S . Então,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

Dem.: (cf. [5] [6]) Sejam a, b, c os vértices de Δ e sejam a', b', c' os pontos médios dos segmentos $[b, c]$, $[c, a]$, $[a, b]$, respectivamente, como mostra a Figura 1.1.4. Consideremos os quatro triângulos Δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$ cujos vértices são, respectivamente,

$$\{a, c', b'\}, \{b, a', c'\}, \{c', b', a'\}, \{a', b', c'\}$$

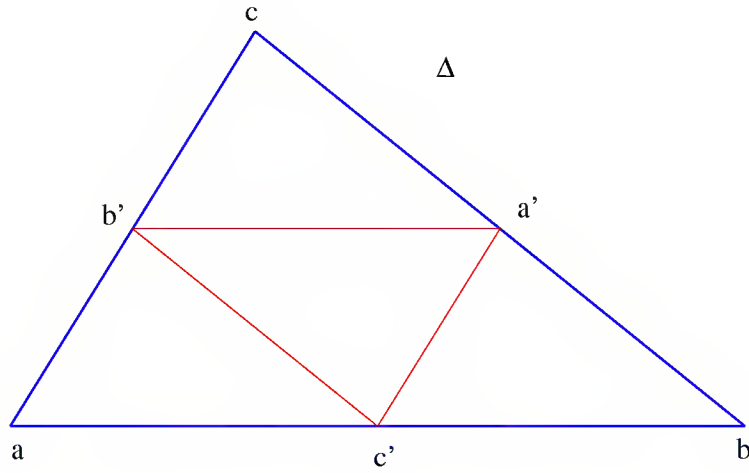


Figura 1.1.4: Subdivisão em triângulos encaixados

Pelas propriedades 1., 2. e 3. do Lema 1.0.0.1 temos,

$$I = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^4 I_j$$

em que $I_j = \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz$

O módulo de pelo menos um dos números I_j deve ser maior ou igual a $\frac{|I|}{4}$. Seja I_1 esse número. Repetindo este procedimento com Δ_1 em substituição de Δ , obtemos uma sucessão de triângulos (Δ_n) , encaixados da seguinte forma:

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots$$

O comprimento da fronteira de cada um dos triângulos $\partial\Delta_n$ é igual a $\frac{L}{2^n}$, em que L é o comprimento de $\partial\Delta$. Portanto,

$$|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right|, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Dado que Δ é um conjunto compacto, existe um ponto $z_0 \in \Delta$ que é comum a todos os triângulos Δ_n . Sendo f diferenciável em S , é diferenciável em z_0 .

Seja $\epsilon > 0$. Então, existe $r > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon |z - z_0|$$

para $|z - z_0| < r$.

Tendo em conta que os triângulos estão encaixados, existe n tal que se $z \in \Delta_n$ então $|z - z_0| < r$.

Note-se que, pelo teorema [1.0.1](#), se tem

$$\int_{\partial\Delta} z^n dz = 0, \quad (n \neq -1)$$

Portanto, temos

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \leq \epsilon (2^{-n} L)^2$$

o que implica que $|I| \leq \epsilon L^2$. Dado que ϵ é arbitrário, $I = 0$. □

Este Lema coloca imediatamente a questão de saber em que conjuntos abertos $S \subset \mathbb{C}$ se verifica a seguinte propriedade: Dados três pontos $a, b, c \in S$, o triângulo fechado Δ de vértices a, b, c está contido em S . Uma classe de conjuntos em que tal se verifica é a dos convexos. Veremos, de seguida, que para esta classe de conjuntos é possível definir primitiva de uma função analítica.

Teorema 1.1.1 *Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e convexo, f uma função analítica em S . Então, existe uma função F analítica em S tal que $f = F'$.*

Dem.: Seja $a \in S$. Sendo S convexo, o segmento $[a, z]$ está contido em S para todo $z \in S$. Portanto, podemos definir,

$$F(z) = \int_{[a, z]} f(w) dw, \quad (z \in S)$$

Dados z e z_0 em S , o triângulo com vértices $\{a, z_0, z\}$ está contido em S . Então

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0, z]} f(w)dw$$

donde obtemos

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} [f(w) - f(z_0)]dw \quad (1.1.1)$$

para $z \neq z_0$.

Sendo f contínua em z_0 , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|z - z_0| < \delta$ então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Portanto, de (1.1.1) obtemos,

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| < \epsilon$$

ou seja, $f = F'$ e, em particular, F é analítica. \square

Outra classe de subconjuntos de \mathbb{C} em que é possível definir primitiva de uma função analítica é a dos conjuntos em forma de estrela.

Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{C}$ é uma **estrela** se existe um ponto $a \in S$ tal que $[a, z] \subset S$ para qualquer $z \in S$ (cf. [5]).

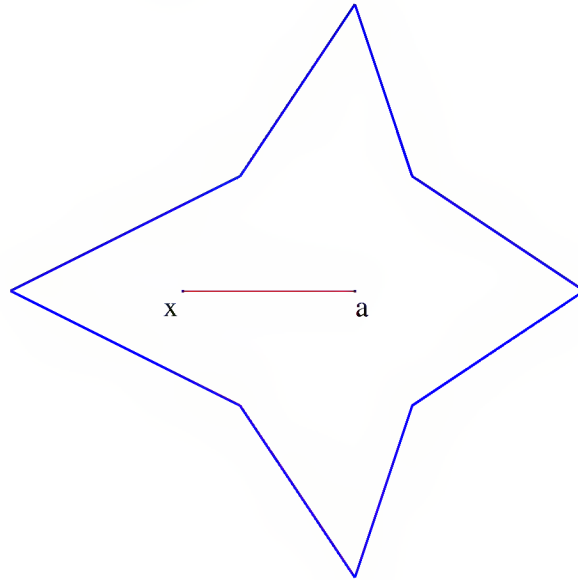


Figura 1.1.5: Conjunto em forma de estrela

Note-se que qualquer conjunto convexo é uma estrela. Tome-se para ponto a qualquer ponto de S .

Um corte do plano complexo dado por

$$\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} : \arg(w) = \alpha\}$$

é uma estrela. Tome-se para ponto a qualquer ponto de \mathbb{C}_α sobre o segmento de recta $\{w \in \mathbb{C}_\alpha : \arg(w) = \alpha + \pi\}$.

A demonstração do teorema 1.1.1 é facilmente adaptável a esta classe de conjuntos. De facto, dados dois pontos z_1 e z_2 em S , se o segmento de recta $[z_1, z_2] \subset S$ então cada um dos segmentos de recta $[a, z]$ com $z \in [z_1, z_2]$ estará contido em S e, portanto, o triângulo fechado de vértices $\{a, z_1, z_2\}$ estará igualmente contido em S .

Do teorema 1.1.1 e do teorema fundamental do cálculo obtemos imediatamente o teorema de Cauchy:

Teorema 1.1.2 *Seja f uma função analítica, definida num aberto e em estrela S , e $\gamma^* \subset S$ um caminho fechado. Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

□

Note-se que a aplicação do teorema fundamental do cálculo exige o conhecimento da primitiva da função a integrar o que, na prática, poderá tornar-se uma dificuldade incontornável. Pense-se, por exemplo, na função $\exp(-z^2)$. O teorema anterior resolve, para caminhos fechados, este problema.

Exemplos: Seja $\gamma(t) = e^{it}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Então, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para cada uma das funções abaixo indicadas:

- Para $f(z) = \frac{1}{z^2}$, veja-se o primeiro exemplo de cálculo de integrais.
- Para $f(z) = \operatorname{cosec}^2(z) = \frac{d}{dz} \cot(z)$, use-se o teorema fundamental do cálculo.
- Para $f(z) = \frac{e^{iz^2}}{4+z^2}$, aplique-se o teorema de Cauchy.
- Para $f(z) = (\operatorname{Im} z)^2$, temos, por definição de integral:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t) i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2 \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) dt + 2i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t) \cos^2(t) dt = 0 \end{aligned}$$

Note-se que esta função não é diferenciável.

- (Exercício:) $f(z) = \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{2z+1}$.

1.2 Consequências do Teorema de Cauchy

1.3 Índice de um Caminho Fechado

Seja γ um caminho fechado e designemos por S o complementar de γ^* . Seja $z \in S$ e consideremos o integral

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}, \quad (z \in S)$$

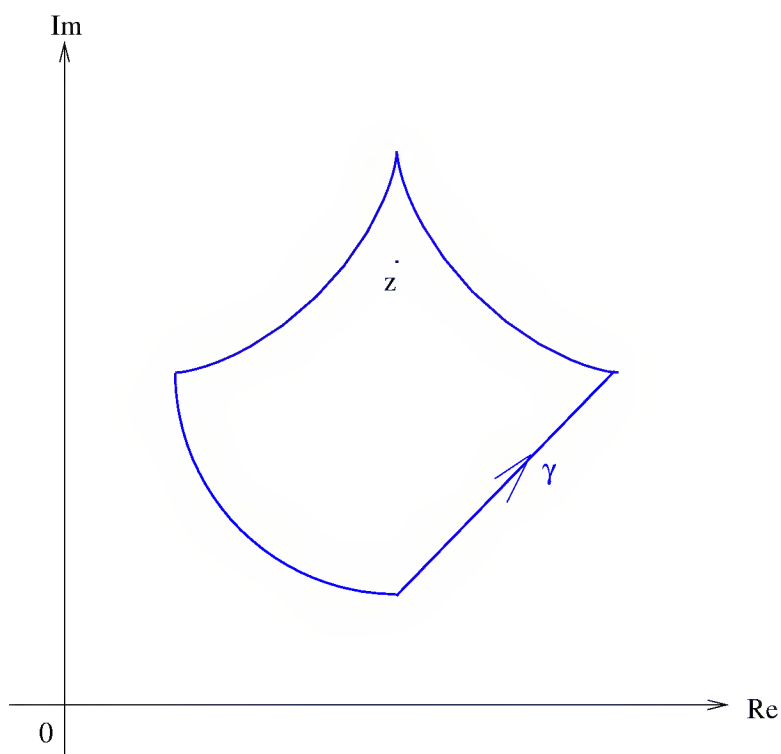


Figura 1.3.6: Índice de um caminho no ponto z

Seja

$$\phi(t) = \exp \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds, \quad (a \leq t \leq b)$$

Derivando ϕ obtemos,

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

excepto, possivelmente, num conjunto finito D em que γ não é diferenciável. Assim, a função $\frac{\phi}{\gamma - z}$ é contínua em $[a, b]$ e tem derivada nula em $[a, b] \setminus D$. De facto,

$$\frac{d}{dt} \frac{\phi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\phi'(t)(\gamma(t) - z) - \phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0$$

Sendo D finito, $\frac{\phi}{\gamma-z}$ é constante em $[a, b]$ e, como $\phi(a) = 1$, temos

$$\phi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z}, \quad (a \leq t \leq b)$$

Dado que γ é um caminho fechado, ou seja, $\gamma(a) = \gamma(b)$, fica claro que $\phi(b) = 1$. Por outro lado, $\phi(b) = \exp(2\pi i \text{Ind}_\gamma(z))$. Portanto, $\phi(b) = 1$ se e só se $\exp(2\pi i \text{Ind}_\gamma(z)) = 1$. Sendo a exponencial complexa uma função periódica de períodos $2k\pi i$, em que $k \in \mathbb{Z}$, concluímos que a função Ind_γ toma valores inteiros em S .

Veremos de seguida que a função Ind_γ pode ser representada por uma série de potências, ou seja, trata-se de uma função analítica em S .

Seja $a \in S$. Sendo S um conjunto aberto, existe um disco $D_r(a) \subset S$. Dado que S é o complementar de γ^* , tem-se: $|w - a| > r$ para todo $z \in D_r(a)$ e, portanto,

$$\left| \frac{z - a}{w - a} \right| \leq \frac{|z - a|}{r} < 1$$

Dado que

$$\frac{w - a}{w - z} = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}}$$

podemos expressar $\frac{1}{w-z}$ em termos de uma série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}} = \frac{1}{w - z}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}} dw \end{aligned}$$

Se fôr possível trocar a série com o integral na expressão anterior, concluímos que a função Ind_γ pode ser expressa na forma de uma série de potências:

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (z \in D_r(a))$$

em que os coeficientes c_n são dados por

$$c_n = \int_\gamma \frac{1}{(w - a)^{n+1}} dw, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Portanto, a função Ind_γ é analítica em S .

A possibilidade de troca da série com o integral fica estabelecida no Lema seguinte ([5]):

Lema 1.3.0.1 *Seja γ um caminho, (f_k) uma sucessão de funções contínuas em γ^* tais que, para todo $z \in \gamma^*$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ converge. Suponhamos que existem constantes M_k tais que a série $\sum M_k$ converge e, para todo $z \in \gamma^*$, se tem: $|f_k(z)| \leq M_k$. Então*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) dz$$

Dem.: Seja $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ e $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$. Por serem contínuas, F e F_n são integráveis em γ^* e, por comparação, a série $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ converge e temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} F(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_{\gamma} f_k(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} (F(z) - F_n(z)) dz \right| \\ &\leq \sup_{z \in \gamma^*} |F(z) - F_n(z)| l(\gamma) \\ &\leq \sup_{z \in \gamma^*} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| l(\gamma) \\ &\leq l(\gamma) \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \end{aligned}$$

Sendo $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = 0$, o que estabelece o pretendido.

□

Note-se que, se $|w - a| > r$,

$$\left| \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{r} \left(\frac{|z - a|}{r} \right)^n =: M_n$$

e a série $\sum M_n$ converge desde que se tenha $|z - a| < r$, o que permite concluir que a função Ind_{γ} é representável por uma série de potências.

Dado que a imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é um conjunto conexo e, sabendo que Ind_{γ} toma apenas valores inteiros, concluímos que Ind_{γ} deve ser constante em cada componente conexa de S .

Finalmente, da definição de Ind_{γ} deduz-se que, para $|z|$ suficientemente grande, se tem $|\text{Ind}_{\gamma}(z)| < 1$, o que implica que $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ na componente não limitada de S .

De facto, seja $R > 2 \max \{|z| : z \in \gamma^*\}$ e consideremos o conjunto

$$S_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| > \frac{R}{2}; \forall w \in \gamma^*\}$$

Para $z \in S_R$, temos,

$$|\text{Ind}_{\gamma}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{1}{w - z} \right| dw \leq \frac{l(\gamma)}{\pi R}$$

Exemplo: Seja $\gamma(t) = a + re^{it}$ em que $r > 0$ e $0 \leq t \leq 2\pi$. Então, para $|z - a| < r$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1$$

ou seja,

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } |z - a| < r \\ 0, & \text{se } |z - a| > r \end{cases} \quad (1.3.1)$$

1.4 Fórmulas Integrais de Cauchy

Teorema 1.4.1 *Seja γ um caminho fechado e contido num aberto e em estrela S e seja f uma função analítica em S . Então, para $z \in S \setminus \gamma^*$ tem-se*

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (1.4.2)$$

Dem.: Seja $z \in S \setminus \gamma^*$ e consideremos a seguinte função

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & \text{se } w \in S, w \neq z \\ f'(z), & \text{se } w = z \end{cases}$$

Esta função satisfaz as condições do teorema 1.1.2 e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) \end{aligned}$$

□

Para o caso em que $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$ obtém-se uma fórmula integral para a função f o que permitirá representar funções analíticas em termos de séries de potências. De facto, se tomarmos para γ uma circunferência, o teorema seguinte estabelece essa representação.

Teorema 1.4.2 *Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Então f é representável por uma série de potências em S .*

Dem.: Seja $a \in S$ e $R > 0$ tal que $D_R(a) \in S$. Seja γ uma circunferência centrada em a , de raio $r < R$ e percorrida uma vez no sentido positivo. Sendo $D_R(a)$ um conjunto convexo, estão satisfeitas as condições do teorema anterior. Note-se que, para esta circunferência se tem $\text{Ind}_\gamma(z) = 1$ em que $z \in D_r(a)$. Portanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad (z \in D_r(a))$$

Seguindo os mesmos passos da prova de que a função índice é analítica, concluimos que existe uma sucessão de coeficientes (c_n) tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (z \in D_r(a))$$

Da unicidade dos coeficientes c_n , obtemos a mesma série para qualquer $r < R$ desde que a esteja fixado. Portanto, a representação em série de potências é válida para todo $z \in D_R(a)$ como era pretendido. \square

A tal série de potências chamamos série de Taylor de f .

Sendo f representável por uma série de potências, a derivada f' também o será, ou seja, a derivada de uma função analítica é uma função analítica. Do estudo das séries de potências e do teorema anterior obtemos as chamadas fórmulas integrais de Cauchy:

$$c_n n! = f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.4.3)$$

em que $\gamma^* \subset S$ é uma circunferência centrada em a e descrita uma vez no sentido positivo.

Exemplos:

- Seja $\gamma(t) = i + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Então,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{z^2}{z^2 + 1} dz &= \int_\gamma \frac{z^2}{(z + i)(z - i)} dz \\ &= 2\pi i \left[\frac{z^2}{z + i} \right]_{z=i} = -\pi \end{aligned}$$

- Seja $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Então, usando a fórmula (1.4.3),

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3} dz = \left[\frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} e^z \right]_{z=0} = \pi i$$

- Para calcular o integral $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Re} z}{z - \frac{1}{2}} dz$, em que γ é o caminho do exemplo anterior, não podemos usar a fórmula de Cauchy porque $\operatorname{Re} z$ não é uma função analítica.

No entanto, para $|z| = 1$ temos:

$$\operatorname{Re} z = \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Re} z}{z - \frac{1}{2}} dz &= \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{2z(z - \frac{1}{2})} dz \\ &= \int_{\gamma} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z} + \frac{5}{2(2z - 1)} \right) dz \\ &= 0 - 2\pi i + 5\frac{\pi}{2}i = \frac{\pi i}{2} \end{aligned}$$

1.5 Teorema de Morera

O teorema seguinte designado por Teorema de Morera estabelece o recíproco do teorema de Cauchy.

Teorema 1.5.1 *Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua tal que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

para todo o triângulo fechado $\Delta \subset S$. Então, f é uma função analítica em S .

Dem.: Seja $a \in S$ e $r > 0$ tal que $D_r(a) \subset S$. Sendo $D_r(a)$ um conjunto aberto e convexo, existe uma função F analítica em $D_r(a)$ tal que $F' = f$ e, portanto, f é também analítica em $D_r(a)$. Dado que $a \in S$ é arbitrário, concluímos que f é analítica em S . \square

1.6 Teorema de Liouville

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira e limitada. Consideremos dois pontos $a, b \in \mathbb{C}$. Seja $R \geq 2 \max(|a|, |b|)$ tal que se tenha $|w - a| \geq \frac{R}{2}$ e $|w - b| \geq \frac{R}{2}$ para $|w| = R$. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Aplicando a fórmula integral de Cauchy (1.4.2), obtemos:

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \left(\frac{1}{w - a} - \frac{1}{w - b} \right) dw$$

e, portanto,

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi RM \frac{|a - b|}{(\frac{1}{2}R)^2}$$

em que M é tal que $|f(w)| \leq M$, $\forall w \in \mathbb{C}$. Sendo R arbitrário, concluímos que $f(a) = f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$.

Temos, assim, o chamado Teorema de Liouville:

Teorema 1.6.1 *Uma função inteira e limitada é constante.*

□

1.7 Teorema Fundamental da Álgebra

Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinómio não constante de coeficientes complexos. Suponhamos que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado que, se $|z| \rightarrow \infty$, então $|p(z)| \rightarrow \infty$, existe $R > 0$ tal que $\frac{1}{|p(z)|} < 1$ para $|z| > R$. Por outro lado, no compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ a função $\frac{1}{p(z)}$ é contínua e, portanto, limitada. Assim, a função $\frac{1}{p(z)}$ é limitada em \mathbb{C} e, sendo inteira, pelo teorema de Liouville, concluímos que $\frac{1}{p(z)}$ deve ser constante. Temos, assim, o chamado Teorema Fundamental da Álgebra que estabelece a existência de zeros de polinómios:

Teorema 1.7.1 *Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinómio não constante de coeficientes complexos. Então existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $p(w) = 0$.*

1.8 Zeros de Funções Analíticas

O facto de que uma função analítica é representável localmente por uma série de potências permite caracterizar o seu conjunto de zeros.

Seja $S \subset \mathbb{C}$ um aberto e conexo e $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ um função analítica e designemos por $Z(f) = \{a \in S : f(a) = 0\}$ o conjunto dos zeros de f . Seja A o conjunto de pontos de acumulação de $Z(f)$. Sendo f contínua, $A \subset Z(f)$. Fixemos $a \in Z(f)$, e seja $r > 0$ tal que $D_r(a) \subset S$ e em que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (z \in D_r(a))$$

Se todos os coeficientes c_n forem nulos, $D_r(a) \subset A$ e a é um ponto interior de A . Caso contrário, como $f(a) = 0$, existe o menor dos inteiros $m > 0$ tal que $c_m \neq 0$. Neste caso, defina-se

$$g(z) = \begin{cases} (z - a)^{-m} f(z), & \text{se } z \in S \setminus \{a\} \\ c_m, & \text{se } z = a \end{cases}$$

Desta definição fica claro que g é uma função analítica em $S \setminus \{a\}$ e, da série para f obtemos a representação em série de potências para g :

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k, \quad (z \in D_r(a))$$

e, portanto, g é uma função analítica em S . Para além disso, $g(a) = c_m \neq 0$ e, sendo g contínua, existe um disco centrado em a onde não existem zeros de g , ou seja, a é um ponto isolado de $Z(f)$.

Assim, se $a \in A$, todos os coeficientes c_n são nulos e, portanto, A é um conjunto aberto. Por outro lado, por definição A é fechado. Dado que S é conexo, ou $A = S$ e então $Z(f) = S$, ou $A = \emptyset$.

Portanto, ou $Z(f) = S$ ou $Z(f)$ não tem pontos de acumulação em S .

Se $A = \emptyset$, em cada compacto de S não poderá ocorrer mais do que um número finito de zeros de f . Como S pode ser descrito como uma união numerável de compactos, concluimos que $Z(f)$ é, quanto muito, numerável.

O que acaba de ser exposto pode ser resumido no teorema seguinte:

Teorema 1.8.1 *Seja $S \subset \mathbb{C}$ um aberto e conexo, $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e $Z(f) = \{a \in S : f(a) = 0\}$. Então, ou $Z(f) = S$ ou $Z(f)$ não tem pontos de acumulação em S . No segundo caso, a cada $a \in Z(f)$ corresponde um único inteiro $m = m(a)$ tal que*

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \quad (z \in S) \quad (1.8.4)$$

em que g é uma função analítica em S e $g(a) \neq 0$. Além disso, $Z(f)$ é um conjunto contável.

Ao inteiro m chama-se ordem do zero e no caso em que $m = 1$ diz-se que o zero é simples. Desta caracterização dos zeros de uma função analítica deduz-se o seguinte teorema de unicidade que estabelece que uma função analítica num aberto conexo S fica completamente definida sobre qualquer conjunto com pontos de acumulação em S .

Teorema 1.8.2 *Sejam f, g duas funções analíticas num aberto e conexo S . Se $f(z) = g(z)$ num conjunto com pontos de acumulação em S , então $f(z) = g(z)$ em S .*

Note-se que este teorema deixa de ser válido para o caso em que S não é conexo. De facto, se $S = S_1 \cup S_2$ em que S_1, S_2 são abertos disjuntos, considere-se a função definida por

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z \in S_1 \\ 1, & \text{se } z \in S_2 \end{cases}$$

1.9 Teorema do Módulo Máximo

Tal como para os zeros de uma função analítica $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ definida num aberto e conexo, os pontos de máximo de $|f|$ obedecem a restrições que só não se verificam para funções constantes.

Teorema 1.9.1 *Seja f uma função definida e analítica num disco $D_R(a)$ e tal que $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in D_R(a)$. Então f é constante.*

Dem.: Seja $0 < r < R$ e $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Pela fórmula integral de Cauchy temos,

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt \end{aligned}$$

Dado que $r < R$ e, por hipótese, $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in D_R(a)$, obtemos,

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt \leq |f(a)|$$

e, portanto,

$$\int_0^{2\pi} [|f(a)| - |f(a + re^{it})|] dt = 0$$

Sendo a função integranda contínua e não negativa, deve ser nula, ou seja, f é constante em $D_R(a)$. □

Seja S um aberto, conexo e limitado e f uma função analítica em S e contínua em \bar{S} . Assim, $|f|$ tem máximo em \bar{S} . Suponhamos que o ponto de máximo se situa no interior de S . Pelo teorema anterior, f deve ser constante em algum disco centrado nesse ponto o que implica que f deve ser constante em S por unicidade. Por ser contínua, f é constante em \bar{S} e, portanto, $|f|$ tem o seu máximo sobre a fronteira de S . Tem-se, assim, o teorema do módulo máximo:

Teorema 1.9.2 *Seja S um aberto, conexo e limitado e f uma função analítica em S e contínua em \bar{S} . Então, $|f|$ tem o seu máximo sobre a fronteira de S .*

Como exemplo de aplicação deste teorema, consideremos uma função f analítica em $D_1(0)$. Suponhamos que se tem

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ |f(z)| &\leq 1; \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

Consideremos a função g definida por

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f(z)}{z}, \quad z \neq 0 \\ g(0) &= f'(0) \end{aligned}$$

Sendo g analítica em $D_1(0)$, pelo teorema do módulo máximo concluímos que se tem

$$|g(z)| \leq 1$$

ou seja

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in D_1(0)$$

e, em particular,

$$|f'(0)| \leq 1$$

Se para algum $z \in D_1(0)$ tivermos $|g(z)| = 1$, então, pelo teorema do módulo máximo, a função g será constante em $D_1(0)$, ou seja, $g(z) = \lambda$ em que $|\lambda| = 1$. Portanto, a função f terá a seguinte forma

$$f(z) = e^{i\alpha} z$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $\lambda = e^{i\alpha}$.

1.10 Exercícios

Nesta série de exercícios, iremos denotar por $\gamma(a, r)$ a circunferência centrada em $a \in \mathbb{C}$ e de raio r e percorrida no sentido positivo, ou seja,

$$\gamma(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\} = \{a + re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$$

1. Mostre que sobre a circunferência $\gamma^* = \{z : |z| = R > 1\}$ se tem

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\text{Log}(z)}{z^2} dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \log(R)}{R}$$

2. Use o teorema de Cauchy para mostrar que se tem

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 0$$

nos casos seguintes:

a) $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$

b) $f(z) = \tan(z)$

c) $f(z) = \text{Log}(z+2)$

3. Considere a função $f(z) = z^{1/2}$ com $f(0) = 0$ e $|z| > 0$; $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$. Seja $\gamma^* = \{z : |z| = 1; \text{Im}(z) \geq 0\}$. Mostre que o teorema de Cauchy não se aplica no cálculo do integral $\int_{\gamma} f(z) dz$. Calcule esse integral.

4. Para $\gamma = \gamma(0, 2)$, calcule os integrais:

- a) $\int_{\gamma} \frac{z^3+5}{z-i} dz$
- b) $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+z+1} dz$
- c) $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2+1} dz$
- d) $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^n} dz$
- e) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$

5. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e convexo e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Seja γ um caminho fechado em A e $z_0 \in A \setminus \gamma^*$. Mostre que se tem

$$\int_{\gamma} \frac{f'(w)}{w - z_0} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw$$

6. Seja f uma função inteira tal que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Prove que f é constante.
7. Seja f uma função analítica em \mathbb{C} . Prove que, se existem constantes M e K e um inteiro positivo n tais que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| \geq K$, então f é um polinómio de grau menor ou igual a n .
8. Seja A um subconjunto convexo de \mathbb{C} e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e não nula. Mostre que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

em que γ é um caminho fechado em A .

9. Seja f uma função analítica no disco fechado $\overline{D_1(0)}$. Prove que, se para algum $r > 0$ e algum $a \in \mathbb{C}$ se tem $f(\partial D_1(0)) \subset D_r(a)$, então

$$f(D_1(0)) \subset D_r(a)$$

10. Prove que uma função analítica numa estrela tem primitiva.
11. Seja $S \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Suponhamos que f é analítica em $S \setminus [a, b]$ em que $[a, b] \subset S$ é um segmento de recta. Prove que f é analítica em S .
12. Seja f uma função analítica num domínio $S \subset \mathbb{C}$. Considerando a função e^f , mostre que $\operatorname{Re}(f)$ não pode ter máximo em S .

Capítulo 2

Singularidades

2.1 Classificação

Consideremos a função $f(z) = \frac{1}{z}$, que, como vimos, desempenha um papel importante no teorema de Cauchy e, especialmente, nas suas consequências. Esta função apresenta a particularidade de não estar definida na origem e é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em particular, é analítica em qualquer coroa circular centrada na origem. Nesta secção analisaremos, com algum pormenor, as funções que são analíticas excepto em pontos isolados e obteremos uma classificação desses pontos a que chamaremos singularidades.

Seja $S \subset \mathbb{C}$ um aberto, $a \in S$ e f uma função analítica em $S \setminus \{a\}$. Diz-se, neste caso, que f tem uma **singularidade** em a .

Se $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existe, diz-se que f tem uma singularidade **removível** em a . Neste caso, f pode ser definida em S tomando $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Chamaremos disco perforado em a ao conjunto $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$.

Teorema 2.1.1 *Seja f uma função analítica em $S \setminus \{a\}$ e limitada em algum disco perforado $D_r^*(a)$. Então f tem uma singularidade removível em a .*

Dem.: Seja $h : S \rightarrow \mathbb{C}$ definida do seguinte modo:

$$h(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z = a \\ (z - a)^2 f(z), & \text{se } z \neq a \end{cases}$$

Sendo f limitada em algum disco perforado, obtemos,

$$\left| \frac{h(z) - h(a)}{z - a} \right| = |(z - a)f(z)| \leq M|z - a|$$

em que M é tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in D_r^*(a)$.

Portanto, h é diferenciável em a e $h'(a) = 0$.

Assim, h é analítica em S e pode ser representada pela série de potências

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (z \in D_r(a))$$

Tomando $f(a) = c_2$, obtemos uma extensão analítica de f em S e representada pela série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^n, \quad (z \in D_r(a))$$

□

Note-se que a função $f(z) = \frac{1}{z}$ não se encontra nas condições do teorema anterior o que nos leva a pensar no tipo de singularidades que uma função pode apresentar. O teorema seguinte resolve este problema apresentando uma classificação exaustiva das singularidades isoladas.

Teorema 2.1.2 *Seja $a \in S$ uma singularidade de f . Então, apenas três casos podem ocorrer:*

- a) *f tem uma singularidade removível em a .*
- b) *Existem complexos c_1, c_2, \dots, c_m , sendo $m \in \mathbb{N}$ e $c_m \neq 0$, tais que a função*

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

tem uma singularidade removível em a .

- c) *Se $r > 0$ e $D_r(a) \subset S$, então $f(D_r^*(a))$ é um conjunto denso no plano complexo.*

No caso b), diz-se que f tem um **polo** de ordem m em a e diz-se que a função $\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}$ é a parte principal de f em a .

É claro que se f tem um polo em a , então

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$$

Ao número m chamamos ordem do polo e no caso em que $m = 1$ dizemos que o **polo** é **simples**.

No caso c), diz-se que f tem uma **singularidade essencial** em a . Dito de outra forma, a cada complexo w corresponde uma sucessão (z_n) tal que $z_n \rightarrow a$ e $f(z_n) \rightarrow w$, ou equivalentemente,

$$\forall w \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0, \forall r > 0, \exists z \in D_r^*(a) : |f(z) - w| < \epsilon$$

No que segue e sempre que não haja perigo de confusão denotaremos

$$D = D_r(a), \quad D^* = D_r^*(a).$$

Dem.: (cf. [6]) Suponhamos que c) não se verifica. Então, existem $r > 0$, $\epsilon > 0$ e $w \in \mathbb{C}$ tais que $|f(z) - w| > \epsilon$ em $D_r^*(a)$. Seja g a função definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}, \quad (z \in D^*) \quad (2.1.1)$$

Então, g é analítica em D^* e $|g| < \frac{1}{\epsilon}$. Pelo teorema 2.1.1 g é analítica em D , pelo que, dois casos podem ocorrer.

Se $g(a) \neq 0$, sendo $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$, obtemos que f é limitada em algum disco perforado $D_\rho^*(a)$, o que, pelo teorema 2.1.1 significa que f tem uma singularidade removível em a .

Se a é um zero de g de ordem $m \geq 1$, temos

$$g(z) = (z - a)^m g_1(z) \quad (z \in D)$$

em que g_1 é analítica e não nula em D .

Assim, seja $h = \frac{1}{g_1}$. Então, h é analítica e não nula em D , o que permite escrever

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n \quad (z \in D)$$

em que $b_0 \neq 0$.

Por outro lado, de (2.1.1), obtemos para $z \in D^*$,

$$\begin{aligned} f(z) - w &= (z - a)^{-m} h(z) \\ &= (z - a)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n \\ &= \frac{b_0}{(z - a)^m} + \frac{b_1}{(z - a)^{m-1}} + \cdots + b_m + \sum_{k=1}^{\infty} b_{m+k} (z - a)^k \end{aligned}$$

ou seja, a função $f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{b_{m-k}}{(z-a)^k}$ tem uma singularidade removível em a . □

2.2 Série de Laurent

Da correspondência entre funções analíticas e séries de potências e tendo em conta o teorema 2.1.2 podemos concluir que se uma função f tiver uma singularidade não removível em algum ponto a não poderá ser representada por uma série de potências relativa a esse ponto. No entanto, se considerarmos potências com expoentes inteiros $n \in \mathbb{Z}$, será possível obter uma representação em termos de séries do tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n.$$

definidas em algum disco perforado $D_r^*(a)$.

Sejam R e S números reais tais que $(0 \leq R < S \leq \infty)$ e f uma função analítica na coroa circular $\{z \in \mathbb{C} : R < |z| < S\}$. Por razões de clareza fixemos a seguinte notação:

$\gamma(a, r)$ designa a circunferência de raio r e centro em a e percorrida uma vez no sentido positivo;

$\gamma_r(z, w)$ designa o arco de circunferência de raio r e centro na origem e percorrida desde o ponto z até ao ponto w no sentido positivo;

$[z, w]$ designa o segmento de recta percorrido de z para w .

$A(R, S)$ designa a coroa circular de raios R e S com $0 \leq R < S \leq \infty$ e centro na origem do plano complexo.

$I(\gamma)$ designa o conjunto aberto e limitado pela linha simples e fechada γ^* e chama-se, abusivamente, interior de γ^* .

Lema 2.2.0.1

$$\int_{\gamma(0,r)} \frac{f(w)}{w^n} dw = \int_{\gamma(0,R)} \frac{f(w)}{w^n} dw, \quad 0 < r < R, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.2.2)$$

Dem.: (cf. [5]) Consideremos os caminhos seguintes (ver figura 2.2.1):

- $\gamma_1 = \gamma_R(R, iR) + [iR, ir] - \gamma_r(r, ir) + [r, R]$
- $\gamma_2 = \gamma_R(iR, -R) + [-R, -r] - \gamma_r(-ir, r) + [ir, iR]$
- $\gamma_3 = \gamma_R(-R, -iR) + [-iR, -ir] - \gamma_r(-r, -ir) + [-r, -R]$
- $\gamma_4 = \gamma_R(-iR, R) + [R, r] - \gamma_r(-ir, r) + [-ir, -iR]$

Note-se que cada um dos caminhos γ_i está contido num quadrante do plano complexo. Portanto, pelo teorema de Cauchy, obtemos:

$$\int_{\gamma_i} \frac{f(w)}{w^n} dw = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Por outro lado,

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} \frac{f(w)}{w^n} dw = \int_{\gamma(0,R)} \frac{f(w)}{w^n} dw - \int_{\gamma(0,r)} \frac{f(w)}{w^n} dw$$

Portanto,

$$\int_{\gamma(0,R)} \frac{f(w)}{w^n} dw = \int_{\gamma(0,r)} \frac{f(w)}{w^n} dw$$

□

A prova deste Lema mostra que o mesmo se passa se substituirmos a circunferência $\gamma(0, r)$ por uma linha fechada simples e contida no aberto limitado por $\gamma(0, R)$ e tal que $0 \in \gamma$. Note-se que tal circunferência existe dado que $I(\gamma)$ é um conjunto aberto.

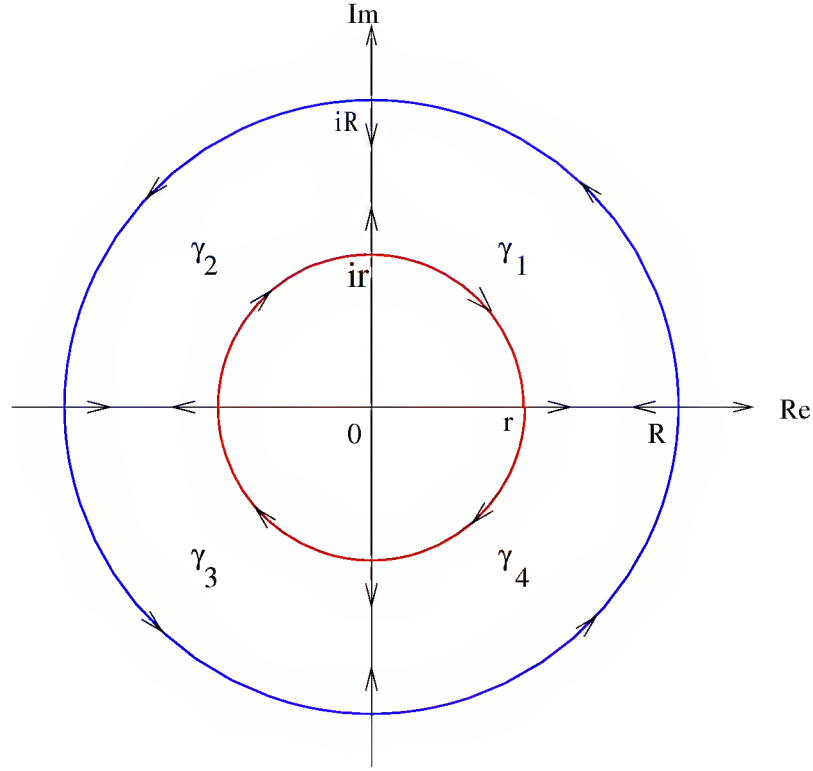


Figura 2.2.1: Invariância do integral

Teorema 2.2.1 *Seja f uma função analítica na coroa circular $A(R, S)$. Então,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad (z \in A) \quad (2.2.3)$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \quad (2.2.4)$$

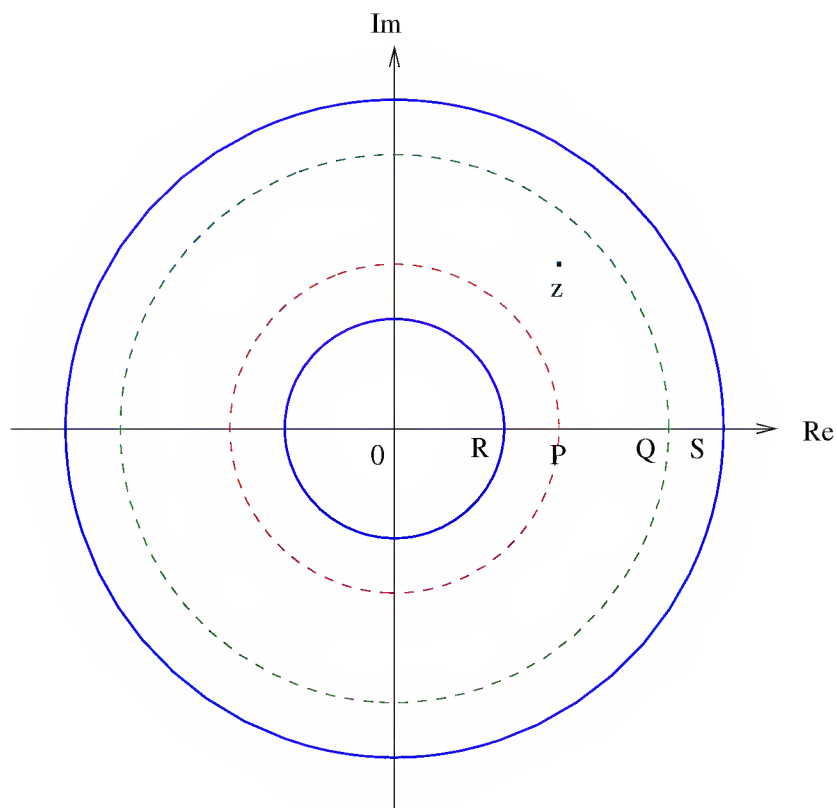
sendo $\gamma = \gamma(0, r)$, $(R < r < S)$

Dem.: Seja $z \in A(R, S)$ e $P, Q > 0$ tais que $R < P < |z| < Q < S$ (ver figura [2.2.2](#)).

Usando o teorema de Cauchy e considerando os caminhos $\gamma(0, Q)$ e $\gamma(0, P)$, obtemos,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0, Q)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0, P)} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0, Q)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} f(w) dw - \int_{\gamma(0, P)} \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{w^m}{z^{m+1}} f(w) dw \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Note-se que $\left| \frac{w}{z} \right| < 1$ para $w \in \gamma(0, P)$ e $\left| \frac{z}{w} \right| < 1$ para $w \in \gamma(0, Q)$.

Figura 2.2.2: Coroa circular $A(R, S)$

Pelo Lema [1.3.0.1](#) podemos trocar o integral com a série em [\(2.2.5\)](#), ou seja,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0,Q)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right) z^n + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma(0,P)} f(w) w^m dw \right) z^{-m-1}$$

Fazendo $n = -m - 1$ no segundo somatório e tendo em conta o Lema [2.2.0.1](#) obtemos a série de Laurent para a função f . \square

É importante notar que a série de Laurent é única. De facto, se f fosse representada, em A , por outra série de Laurent com coeficientes b_n , de [\(2.2.4\)](#), teríamos,

$$\begin{aligned} 2\pi i c_n &= \int_{\gamma(0,r)} f(w) w^{-n-1} dw = \int_{\gamma(0,r)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k w^{k-n-1} dw \\ &= \int_{\gamma(0,r)} \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^{k-n-1} dw + \int_{\gamma(0,r)} \sum_{m=1}^{\infty} b_{-m} w^{-m-n-1} dw \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \int_{\gamma(0,r)} w^{k-n-1} dw = 2\pi i b_n \end{aligned}$$

Este resultado de unicidade revela-se muito importante no cálculo dos coeficientes da série de Laurent. Note-se que para a série de Taylor os coeficientes estão relacionados com as derivadas da função representada o que não acontece com os coeficientes da série de Laurent. No entanto, a unicidade de representação permite obter esses coeficientes desde que sejam conhecidos para alguns casos particulares. Em grande número de aplicações, interessa calcular apenas alguns desses coeficientes.

Note-se que, até este ponto, todos os cálculos foram efectuados supondo que a função f tem uma singularidade na origem do plano complexo. No entanto, todos esses cálculos permanecem válidos para o caso em que f tenha uma singularidade num ponto $a \neq 0$. Assim, numa coroa $\{z : 0 < |z - a| < r\}$ a função f pode ser representada pela série de Laurent dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (2.2.6)$$

em que os coeficientes c_n são calculados da forma seguinte

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \quad (2.2.7)$$

Exemplos:

- Seja $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$. Então f é analítica em cada uma das coroas $A(0, 1)$ e $A(1, \infty)$. Podemos reescrever f na forma seguinte

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

e, portanto,

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} z^k, \quad (z \in A(0, 1)) \quad (2.2.8)$$

Na coroa $A(1, \infty)$, temos,

$$f(z) = z^{-1} - z^{-1}(1 - z^{-1})^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-z^n)$$

- A função $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$ é analítica na coroa $A = \{z : 0 < |z - 1| < 1\}$. Sendo

$$z(z-1)^2 = (z-1)^2(1 + (z-1))$$

obtemos

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} [1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots] = \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad (2.2.9)$$

Nestes casos, recorreremos ao conhecimento da série geométrica o que, por unicidade, permitiu obter os coeficientes da série de Laurent de f para cada uma das coroas consideradas.

- A função $\operatorname{cosec}(z)$ é analítica excepto nos pontos $z = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) e, portanto, será representada por uma série de Laurent em $0 < |z| < \pi$.

$$\operatorname{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = z\left(1 - \frac{z^2}{6} + h(z)\right)$$

em que h é uma função analítica tal que, numa vizinhança da origem, verifica $|h(z)| \leq M|z^4|$, ou seja $h(z) = O(z^4)$.

Tendo em conta que para $|w| < 1$ se tem $\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \cdots$, obtemos,

$$\operatorname{cosec}(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)} = \frac{1}{z} \left[1 - \left(\frac{z^2}{6} + O(z^4)\right)\right]^{-1} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{z^2}{6} + O(z^4)\right) \quad (2.2.10)$$

para $|z|$ pequeno.

- A função

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)}$$

é analítica para $0 < |z| < \pi$. Numa vizinhança da origem, temos,

$$\begin{aligned} \cot(z) &= \left(1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4)\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{6} + O(z^3)\right) \\ &= \frac{1}{z} \left(1 + z^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + O(z^4)\right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} + O(z^3), \quad (0 < |z| < \pi) \quad (2.2.11)$$

- Dado que $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ em \mathbb{C} temos

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} \quad (2.2.12)$$

em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

A classificação das singularidades de uma função pode ser reformulada em termos da respectiva série de Laurent (cf. [5]). Seja a uma singularidade isolada de f . Então f

é analítica em alguma coroa $A = \{z : 0 < |z - a| < r\}$ e pode ser representada pela respectiva série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = f_s(z) + f_a(z)$$

em que

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

se designa por parte analítica de f e

$$f_s(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$$

se designa por parte principal ou singular de f .

Então, tendo em conta o teorema [2.1.2](#) obtemos,

- a é uma singularidade removível se $c_n = 0$ para todo $n < 0$, ou seja, $f = f_a$; $f_s = 0$;
- a é um pólo de ordem $m \geq 1$ se $c_{-m} \neq 0$ e $c_n = 0$ para todo $n < -m$. Neste caso a função f pode ser escrita na forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

em que g é uma função analítica tal que $g(a) = c_{-m} \neq 0$. De facto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k(z-a)^k \\ &= \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{k=0}^{\infty} c_{-m+k}(z-a)^k \\ &= \frac{g(z)}{(z-a)^m} \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

- a é uma singularidade essencial se não existe algum m tal que $c_n = 0$ para todo $n < -m$.

Teorema 2.2.2 *Seja f uma função analítica num disco perforado $D_r^*(a)$. Então f tem um polo de ordem m em a se e só se*

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = D \neq 0 \tag{2.2.14}$$

em que D é uma constante.

Dem.: Suponhamos que a é um polo de ordem m . Então, para $z \in D_r^*(a)$, temos,

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

em que $c_{-m} \neq 0$. Portanto,

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z-a)^n = g(z)$$

A função g é analítica e $g(a) = c_{-m} \neq 0$. Assim,

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = c_{-m} \neq 0$$

Consideremos a série de Laurent relativa ao ponto a . Os coeficientes c_n são dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Da condição (2.2.14), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |z-a| < \delta$, então

$$|(z-a)^m f(z) - D| < \epsilon$$

Seja $0 < s < \min\{\delta, r\}$. Então, para $|z-a| = s$ temos,

$$|(z-a)^m f(z)| \leq |D| + \epsilon$$

e portanto,

$$|(z-a)^{-n-1} f(z)| \leq (|D| + \epsilon) s^{-n-m-1}$$

Assim, os coeficientes c_n podem ser estimados do seguinte modo

$$|c_n| \leq (|D| + \epsilon) s^{-n-m}$$

Portanto, para $n < -m$, $s^{-n-m} \rightarrow 0$ desde que $s \rightarrow 0$, ou seja, $c_n = 0$, o que quer dizer que podemos escrever

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Mas pela condição (2.2.14) obtemos

$$c_{-m} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = D \neq 0$$

□

Exemplos:

- A função $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2}$ tem uma singularidade removível na origem. De facto, tendo em conta que $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}$ obtemos,

$$f(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots$$

- De (2.2.8), (2.2.10) e (2.2.11) concluimos que cada uma das funções $\frac{1}{z(1-z)}$, $\operatorname{cosec}(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}$ e $\cot(z)$ apresenta um polo simples na origem.
- De (2.2.12) concluimos que a função $\exp(\frac{1}{z})$ tem uma singularidade essencial na origem.

2.3 Exercícios

- Mostre que $\frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \dots$, para $0 < |z| < 1$.
- Classifique as singularidades de cada uma das seguintes funções:
 - $ze^{\frac{1}{z}}$
 - $\frac{z^2}{1+z}$
 - $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$
 - $\frac{\cos(z)}{z}$
 - $\frac{z+1}{z^2-2z}$
 - $\frac{\cos(z)}{z}$
 - $\frac{z}{\cos(z)}$
 - $g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$ em que $f(a) = 0$
 - $g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$ em que $f(a) \neq 0$

Capítulo 3

Resíduos e Aplicações

3.1 Teorema dos Resíduos

Para funções analíticas e definidas em estrelas, o integral ao longo de um caminho fechado pode ser facilmente calculado usando o teorema de Cauchy. No caso de funções analíticas em coroas circulares, o teorema dos resíduos desempenhará o mesmo papel.

Lema 3.1.0.1 *Seja f uma função analítica tendo um polo no interior de uma linha simples e fechada γ^* e seja*

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

a respectiva série de Laurent. Então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i c_{-1}$$

Dem.: Seja $r > 0$ tal que $\overline{D_r(a)} \subset I(\gamma)$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma(a,r)} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma(a,r)} \sum_{k=-m}^{\infty} c_k(z-a)^k dz \\ &= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k \int_{\gamma(a,r)} (z-a)^k dz \\ &= 2\pi i c_{-1} \end{aligned}$$

□

Ao coeficiente c_{-1} da série de Laurent chamamos **resíduo de f relativo ao ponto a** e usaremos o símbolo $\text{res}(f, a)$ para o distinguir.

Teorema 3.1.1 *Seja f uma função analítica com um número finito de polos em $I(\gamma)$ em que γ é um caminho fechado, simples e percorrido no sentido positivo. Sejam a_1, a_2, \dots, a_m esses pontos. Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{res}(f, a_k)$$

Dem.: Designemos por f_k a parte principal da série de Laurent de f relativa a a_k . Então, a função definida por

$$g := f - \sum_{k=1}^m f_k$$

tem singularidades removíveis nos pontos a_1, \dots, a_m e, portanto g é analítica e, pelo teorema de Cauchy tem-se

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0$$

donde obtemos, usando o Lema anterior para cada f_k ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma} f_k(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{res}(f, a_k)$$

□

3.2 Zeros e Polos

O teorema dos resíduos permite contar e localizar os zeros e os polos de uma função. Neste processo, os zeros ou polos de ordem m são contados m vezes.

Teorema 3.2.1 *Seja f uma função analítica com um número finito P de polos e um número finito Z de zeros em $I(\gamma)$, sendo γ um caminho fechado e simples percorrido no sentido positivo. Suponhamos que f é não nula sobre γ^* . Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

Dem.: (cf. [6][5][1]) A função $\frac{f'}{f}$ é analítica excepto nos zeros e polos de f . Se a é um zero de f de ordem m , então existe uma função analítica g tal que

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

em algum disco $D_r(a)$ e, portanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Sendo g não nula em $D_r(a)$, a função $\frac{f'}{f}$ tem apenas um polo simples em a e o respectivo resíduo é m .

Se b é um polo de ordem n , então existe uma função g analítica, tal que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-b)^n}$$

e,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{n}{z-b} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Portanto, $\frac{f'}{f}$ tem um polo simples em b e o respectivo resíduo é $-n$.

Tendo em conta o teorema 3.1.1 fica estabelecido o resultado pretendido. \square

O teorema seguinte (Teorema de Rouché) estabelece que duas funções têm o mesmo número de zeros num conjunto se, na fronteira desse conjunto elas estão, de certa maneira, próximas uma da outra.

Teorema 3.2.2 *Seja γ um caminho simples e fechado, f e g duas funções analíticas em $\overline{I(\gamma)}$ e tais que $|f(z)| > |f(z) - g(z)|$ sobre γ^* . Então f e g têm o mesmo número de zeros em $I(\gamma)$.*

Note-se que o número de zeros deve ser finito porque $\overline{I(\gamma)}$ é um conjunto compacto. Caso contrário, pelo teorema da unicidade 1.8.2, f e g seriam identicamente nulas.

Dem.: As funções f e g não têm zeros sobre γ^* , ou seja, por hipótese em γ^* , temos,

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1$$

Seja $h = \frac{f}{g}$. Então, $h(\gamma^*) \subset D_1(1)$ e, portanto, considerando o caminho $h \circ \gamma$, obtemos

$$\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \int_{h \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \text{Ind}_{h \circ \gamma}(0) = 0$$

Por outro lado,

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Assim, pelo teorema anterior, fica provado o pretendido. \square

Exemplos:

- Seja h uma função analítica em $D_1(0)$ e tal que $|h(z)| < 1$ para $|z| = 1$. Então a equação $h(z) = z$ tem apenas uma solução em $D_1(0)$.

De facto, considerando

$$\begin{aligned}\gamma^* &= \{z : |z| = 1\} \\ f(z) &= z \\ g(z) &= z - h(z)\end{aligned}$$

temos,

$$|f(z) - g(z)| = |h(z)| < 1 = |z| = |f(z)|$$

Pelo teorema de Rouché concluímos que g e f têm o mesmo número de zeros.

- Dado um polinómio p de grau n dado por $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ com $a_n \neq 0$, seja $f(z) = a_nz^n$ e $g(z) = p(z)$. Então

$$|f(z) - g(z)| = |a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}| \leq (n-1)a|z|^{n-1}$$

em que $|z| > 1$ e $a = \max\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|\}$.

Seja $\gamma^* = \{z : |z| = R\}$ com $R > \max\{\frac{(n-1)a}{|a_n|}, 1, R_0\}$ em que R_0 é tal que os zeros do polinómio p se encontram no disco de raio R_0 e centro na origem. Assim, temos

$$|f(z) - g(z)| < |a_n|R^n = |f(z)|$$

o que, pelo teorema de Rouché, permite concluir que p tem n zeros em \mathbb{C} .

3.3 Cálculo de Resíduos

Nesta secção veremos algumas formas de cálculo do resíduo relativo a um polo que não envolvem a série de Laurent (cf. [5] [1] [4] [3] [2]).

- Da definição de resíduo, fica claro que, para uma função f com um polo simples num ponto a , se tem:

$$\text{res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) \quad (3.3.1)$$

- Suponhamos que f tem um polo de ordem m em a . Em algum disco perforado $D_r^*(a)$ temos:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^m}$$

em que g é analítica e $g(a) \neq 0$. Pelas fórmulas integrais de Cauchy para derivadas obtemos,

$$\begin{aligned}
g^{(m-1)}(a) &= \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma(a, \frac{r}{2})} \frac{g(z)}{(z-a)^m} dz \\
&= \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma(a, \frac{r}{2})} f(z) dz \\
&= (m-1)! \operatorname{res}(f, a)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a) \quad (3.3.2)$$

- Suponhamos que $f(z) = \frac{h(z)}{k(z)}$, em que h e k são analíticas em $D_r(a)$. Suponhamos também que $h(a) \neq 0$, $k(a) = 0$ e $k'(a) \neq 0$.

Então

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f, a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{h(z)}{k(z)} (z-a) \\
&= \lim_{z \rightarrow a} h(z) \frac{z-a}{k(z) - k(a)} \\
&= \frac{h(a)}{k'(a)} \quad (3.3.3)
\end{aligned}$$

Exemplos:

- A função $f(z) = \frac{1}{(2-z)(z^2+4)}$ tem polos simples nos pontos $\{2, -2i, 2i\}$ e, portanto, por (3.3.1), temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f, 2) &= -\frac{1}{8} \\
\operatorname{res}(f, -2i) &= \frac{1}{4i(2-2i)} = \frac{1-i}{16} \\
\operatorname{res}(f, 2i) &= \frac{1}{-4i(2+2i)} = \frac{1+i}{16}
\end{aligned}$$

- $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ tem polos simples nos pontos $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Considere-se $h(z) = 1$ e $k(z) = 1+z^4$. Então, por (3.3.3), temos

$$\operatorname{res}(f, z_k) = \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=z_k} = -\frac{1}{4} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}$$

- $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4}$ tem um polo de ordem quatro na origem. Por (3.3.2),

$$\text{res}(f, 0) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dz^3} e^{iz} \right]_{z=0} = -\frac{i}{6}$$

- $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$ tem um polo de ordem três em $z = 0$ e polos simples nos inteiros $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Por (3.3.3) temos

$$\text{res}(f, n) = \left[\pi \frac{\frac{\cos(\pi z)}{z^2}}{\pi \cos(\pi z)} \right]_{z=n} = \frac{1}{n^2}, \quad n \neq 0$$

Por outro lado, de (2.2.11) e numa vizinhança da origem temos,

$$\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} + \dots$$

Portanto

$$\text{res}(f, 0) = -\frac{\pi^2}{3}$$

3.4 Cálculo de Integrais e de Séries

O teorema dos resíduos permite o cálculo de integrais de funções de variável real e de somas de séries de termos reais.

Consideremos o caminho

$$\gamma = \gamma_R(R, -R) + [-R, R]$$

(ver figura 3.4.1) e seja f uma função complexa de variável complexa.

Então o integral de f ao longo de γ é dado por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_R(R, -R)} f(z) dz + \int_{[-R, R]} f(x) dx$$

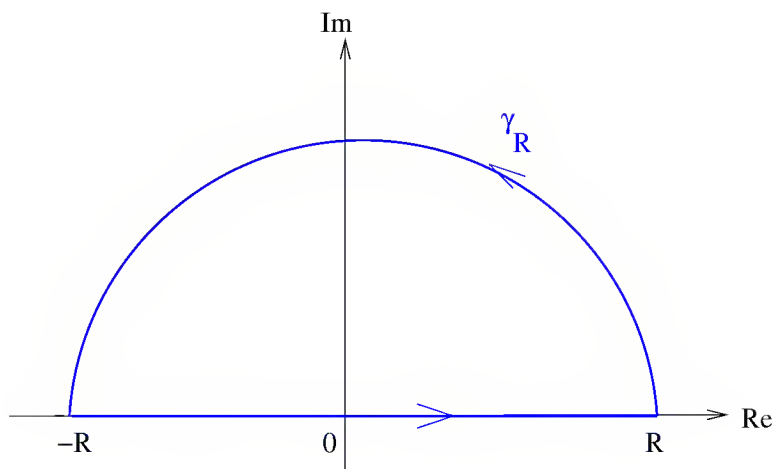
Portanto, usando os teoremas de Cauchy e estimando o integral sobre a semicircunferência $\gamma_R(R, -R)$, podemos calcular o integral de f sobre o segmento de recta $[-R, R]$, ou seja, o integral de uma função de variável real no intervalo $] -R, R[$

Do mesmo modo, se considerarmos o caminho (ver figura 3.4.2)

$$\gamma = [-R, S] + [S, S + i\epsilon] + [S + i\epsilon, -R + i\epsilon] + [-R + i\epsilon, -R]$$

podemos calcular o integral de uma função de variável real no intervalo $] -R, S[$.

Assim, será possível calcular integrais de algumas funções de variável real em intervalos não limitados por passagem ao limite fazendo $R, S \rightarrow \infty$:

Figura 3.4.1: Concatenação dos caminhos $[-R, R]$ e γ_R

- $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx$ designado por integral impróprio de f em $]0, \infty[$.
- $\lim_{R, S \rightarrow \infty} \int_{-R}^S f(x)dx$ designado por integral impróprio de f em \mathbb{R} .

Portanto, poderemos calcular integrais do tipo $\int_0^\infty f(x)dx$ ou $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ entendidos no sentido dos integrais impróprios de Riemann ou no sentido do integral de Lebesgue caso existam. Será também possível calcular integrais de funções trigonométricas.

Integrais do tipo: $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$

Seja f uma função analítica excepto para o conjunto de polos $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ com parte imaginária positiva.

Suponhamos que existem constantes M e R tais que, para $|z| > R$, se tem

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}, \quad \alpha > 1 \quad (3.4.4)$$

Note-se que se $f = \frac{P}{Q}$ em que P e Q são polinómios de grau n e m , respectivamente, e tais que $m \geq n + 2$, então f verifica a condição (3.4.4).

Seja $r > R$ e consideremos o caminho (ver figura 3.4.3)

$$\gamma = \gamma_r(r, -r) + [-r, r]$$

de tal forma que os polos de f se encontram todos em $I(\gamma)$.

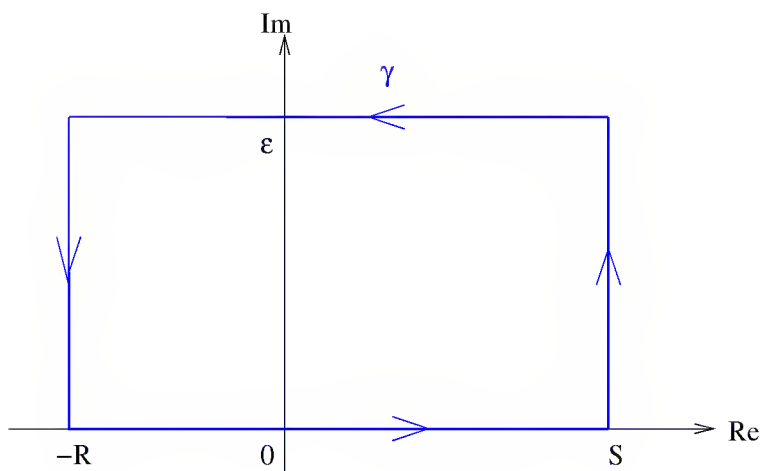


Figura 3.4.2:

Pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{res}(f, a_i)$$

Por um lado,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_0^{\pi} f(re^{it}) ire^{it} dt$$

e a condição (3.4.4) permite concluir que o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

existe.

Por outro lado temos,

$$\left| \int_0^{\pi} f(re^{it}) ire^{it} dt \right| \leq \pi \frac{M}{r^{\alpha-1}}$$

que converge para zero quando $r \rightarrow \infty$, desde que $\alpha > 1$.

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{res}(f, a_i)$$

Exemplo: Para calcular o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

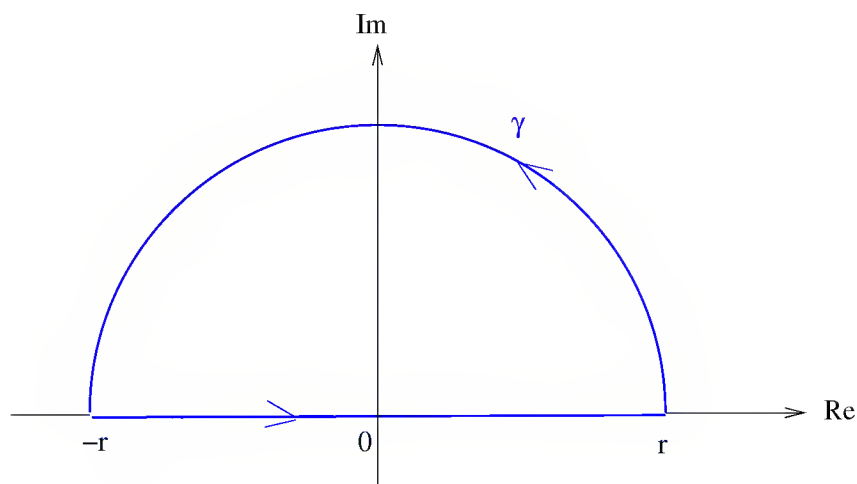


Figura 3.4.3:

determina-se a soma dos resíduos relativos aos polos da função $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ com parte imaginária positiva:

$$\operatorname{res}(f, e^{\frac{\pi i}{4}}) + \operatorname{res}(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}) = -\frac{1}{4}(e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{3\pi i}{4}}) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Note-se que se tem

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|R^4 - 1|}$$

para $z = Re^{it}$, ou seja, f verifica a condição (3.4.4).

Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$

Suponhamos que existem constantes $M, R > 0$ tais que, para $|z| > R$, se tem

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad (3.4.5)$$

Seja

$$g(z) = e^{i\alpha z} f(z); \quad \alpha > 0$$

e consideremos o caminho (ver figura [3.4.4](#))

$$\gamma = [-r, s] + [s, s + ip] + [s + ip, -r + ip] + [-r + ip, -r]$$

em que $r, s, p > R$ e tais que os polos de f , $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, se encontram em $I(\gamma)$.

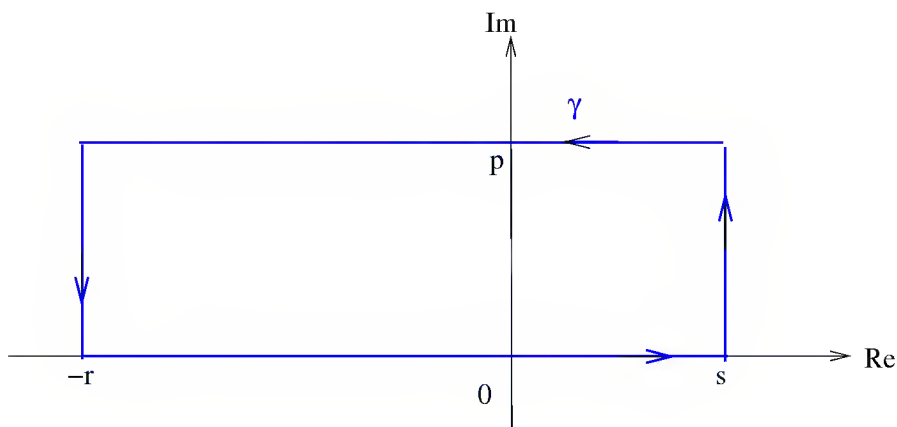


Figura 3.4.4:

Pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{res}(g, a_i)$$

Por outro lado, quando $x = s$; $0 < y < p$ temos

$$\int_0^p e^{-\alpha y} |f(s + iy)| dy \leq \frac{M}{s} \int_0^p e^{-\alpha y} dy = \frac{M(1 - e^{-\alpha p})}{\alpha s} \leq \frac{M}{\alpha s}$$

Do mesmo modo, quando $x = -r$; $0 < y < p$ temos

$$\int_0^p e^{-\alpha y} |f(-r + iy)| dy \leq \frac{M}{\alpha r}$$

Finalmente, para $y = 0$; $-r < x < s$

$$\int_{-r}^s e^{-\alpha p} |f(x + ip)| dx \leq \frac{M e^{-\alpha p} (r + s)}{p}$$

que converge para zero quando $p \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{res}(f(z)e^{i\alpha z}, a_i)$$

Exemplo: Para mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{2b}, \quad b > 0$$

consideremos a função $g(z) = e^{iz}f(z)$ em que $f(z) = \frac{1}{z^2 + b^2}$.

O único polo com parte imaginária positiva é o ponto bi e tem-se

$$\text{res}(f, bi) = \frac{e^{-b}}{2bi}$$

Por outro lado, é claro que f satisfaz a condição (3.4.5).

Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2 + b^2} dx = \text{Re}\left(2\pi i \frac{e^{-b}}{2bi}\right) = \frac{\pi e^{-b}}{b}$$

Integrais trigonométricos

Seja $R(x, y)$ uma função racional que não apresenta polos sobre a circunferência $\gamma = \gamma(0, 1)$ e consideremos o cálculo do integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt$$

Para tal consideremos a função

$$f(z) = \frac{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{iz}$$

Assim, f não tem polos sobre γ e sejam $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ os polos de f em $I(\gamma)$. Pelo teorema dos resíduos, temos

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{res}(f, a_i)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) \frac{ie^{it}}{ie^{it}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) ie^{it} dt = \int_\gamma f(z) dz \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt = \sum_{i=1}^N \text{res}(f, a_i)$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + a^2 - 2a \cos(t)} ; a > 0, a \neq 1 \\
 &= \int_{\gamma} \frac{dz}{iz \left(1 + a^2 - \frac{2a}{2} \left[z + \frac{1}{z}\right]\right)} \\
 &= \int_{\gamma} \frac{dz}{i[-az^2 + (1 + a^2)z - a]} \\
 &= \int_{\gamma} \frac{idz}{(z - a)(az - 1)}
 \end{aligned}$$

Os polos da função integranda $f(z) = \frac{i}{(z-a)(az-1)}$ são $z = a$ e $z = \frac{1}{a}$.

Para $a < 1$, f tem o polo $z = a$ em $I(\gamma)$ e o respectivo resíduo é dado por

$$\text{res}(f, a) = \frac{i}{a^2 - 1}$$

Para $a > 1$, f tem o polo $z = \frac{1}{a}$ em $I(\gamma)$ e o respectivo resíduo é dado por

$$\text{res}\left(f, \frac{1}{a}\right) = \frac{i}{1 - a^2}$$

Portanto, temos,

$$I = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-a^2}, & \text{se } a < 1 \\ \frac{2\pi}{a^2-1}, & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Valor principal de Cauchy

Lema 3.4.0.1 *Suponhamos que f tem um polo simples em a e seja γ_ϵ o arco de circunferência de raio ϵ , centro em a e ângulo α . Então,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = i\alpha \text{res}(f, a) \quad (3.4.6)$$

Dem.: Numa vizinhança de a podemos escrever f na forma

$$f(z) = \frac{b}{z - a} + h(z)$$

em que h é analítica, $b = \text{res}(f, a)$ e, portanto,

$$\int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{b}{z - a} dz + \int_{\gamma_\epsilon} h(z) dz$$

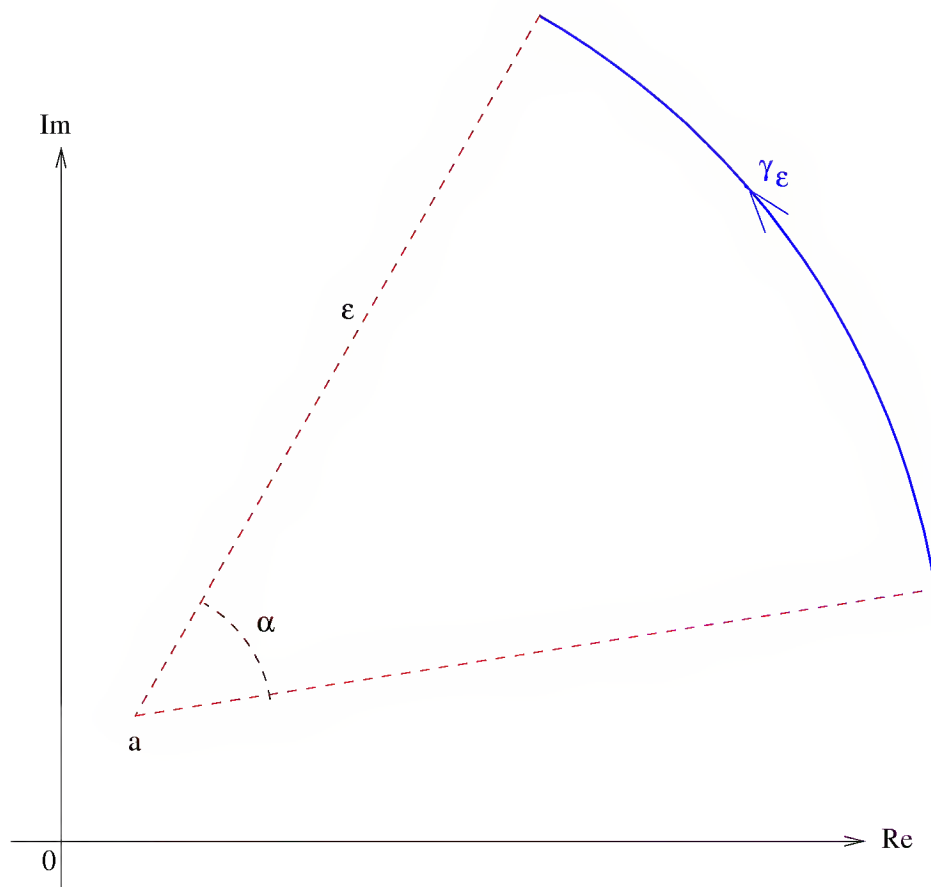


Figura 3.4.5:

Por outro lado,

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{b}{z-a} dz = b \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\alpha} \frac{\epsilon i e^{it}}{\epsilon e^{it}} dt = ib\alpha$$

em que $\gamma_\epsilon(t) = a + \epsilon e^{it}$, $\alpha_0 \leq t \leq \alpha_0 + \alpha$, como mostra a Figura 3.4.5

Seja h analítica, $|f(z)| \leq M$ numa vizinhança de a e, portanto,

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} h(z) dz \right| \leq M l(\gamma_\epsilon) = M\alpha\epsilon \rightarrow 0$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

□

Seja f uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{a_1 < a_2 < \dots < a_N\}$. Se para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{a_1-\epsilon} f(x) dx + \int_{a_1+\epsilon}^{a_2-\epsilon} f(x) dx + \dots + \int_{a_N+\epsilon}^{\infty} f(x) dx \right]$$

existe, diz-se que este limite é o valor principal de Cauchy e representa-se por $PV. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Seja f uma função analítica excepto para um conjunto finito de polos simples $\{a_1 < a_2 < \dots < a_N\}$ sobre o eixo real e para um conjunto finito de polos $\{b_1, \dots, b_K\}$ tais que $\text{Im}(b_i) > 0$. Suponhamos que uma das condições seguintes se verifica:

i) Existem $M, R > 0$ tais que para $|z| > R$ e $\text{Im}(z) \geq 0$ se tem

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (3.4.7)$$

ii) $f(z) = e^{i\alpha z}g(z)$, em que $\alpha > 0$ e existem $M, R > 0$ tais que, para $|z| > R$ e $\text{Im}(z) \geq 0$ se tem

$$|g(z)| \leq \frac{N}{|z|} \quad (3.4.8)$$

Seja $\gamma = \gamma_r(r, -r) + \gamma_1 + \dots + \gamma_N + \tilde{\gamma}$ em que $r > \max\{|a_i| : i = 1, 2, \dots, N\}$, γ_i designa a semicircunferência $\gamma_\epsilon(a_i + \epsilon, a_i - \epsilon)$ e $\tilde{\gamma}$ designa os segmentos de recta sobre o eixo real tais que o caminho γ é fechado (ver figura 3.4.6).

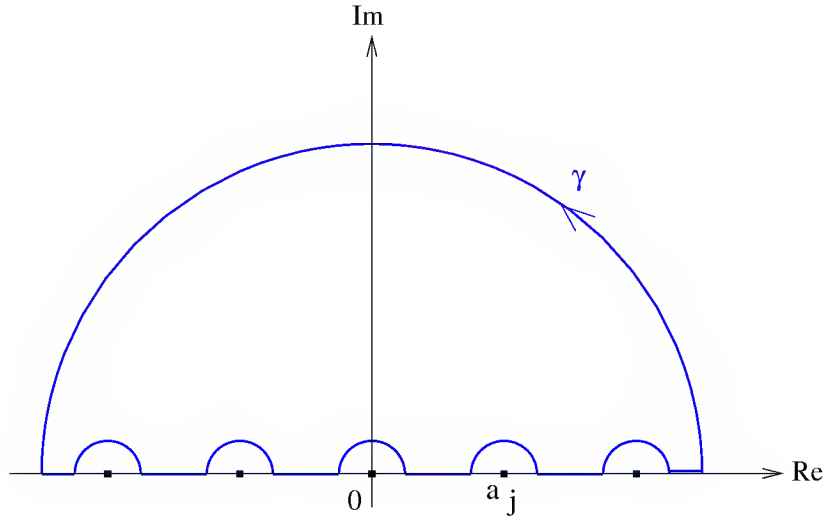


Figura 3.4.6:

A condição (3.4.7) permite concluir que $\int_{\gamma_r(r, -r)} f(z)dz \rightarrow 0$ se $r \rightarrow \infty$.

O Lema 3.4.0.1 garante que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_j} f(z)dz = -\pi i \text{res}(f, a_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Portanto, temos

$$PV. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^K \text{res}(f, b_j) + \pi i \sum_{j=1}^N \text{res}(f, a_j) \quad (3.4.9)$$

Exemplo: Para mostrar que se tem

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

consideremos a função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

e o caminho

$$\gamma = \gamma_r(r, -r) - \gamma_\epsilon(\epsilon, -\epsilon) + \tilde{\gamma}$$

em que $\tilde{\gamma}$ designa os dois segmentos de recta sobre o eixo real tais que γ é fechado como mostra a Figura [3.4.7](#)

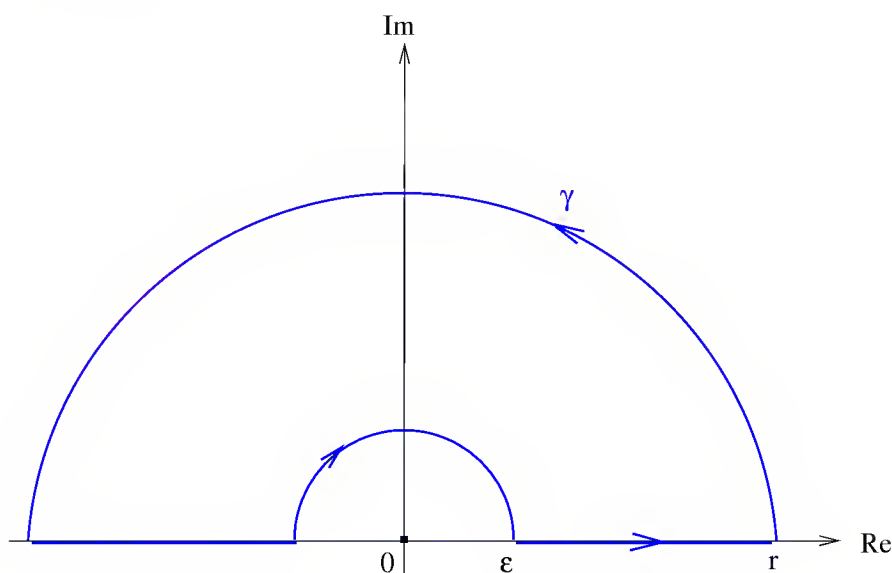


Figura 3.4.7:

Então, por [\(3.4.9\)](#), $PV. \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$ existe e tem-se

$$PV. \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$$

Mas,

$$\int_\gamma f(z) dz = \pi i \operatorname{res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \pi i$$

o que estabelece o que se pretendia.

Integrais de funções multivalentes

Seja f uma função analítica excepto num conjunto finito de polos e consideremos integrais do tipo

$$\int_0^\infty f(x) \log(x) dx, \quad \int_0^\infty f(x) x^{a-1} dx$$

em que $a > 0$.

Exemplo: Para calcular o integral

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2} dx$$

consideramos o corte do plano complexo \mathbb{C}_π e consideramos o ramo analítico do logaritmo dado por $\log(z) = \log(|z|) + i\theta$ em que $z = |z|e^{i\theta}$ e $-\pi < \theta \leq \pi$.

Assim, a função $f(z) = \frac{\log(z)}{1+z^2}$ é analítica em \mathbb{C}_π excepto nos polos $\pm i$.

Consideremos o caminho

$$\gamma = \gamma_R(R, -R) + [-R, -\epsilon] - \gamma_\epsilon(\epsilon, -\epsilon) + [\epsilon, R]$$

em que $R > 1$ (ver figura [3.4.8](#)).

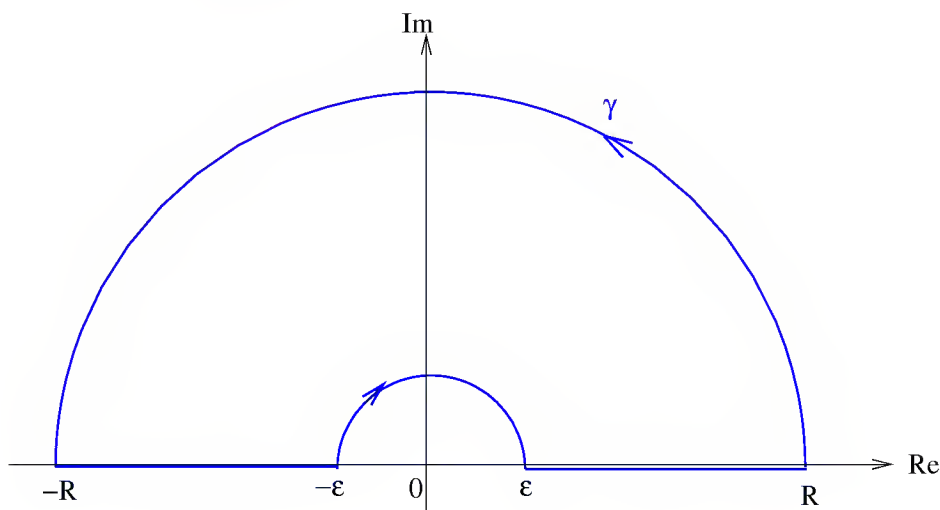


Figura 3.4.8:

Pelo teorema dos resíduos temos,

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, i) = 2\pi i \frac{\log(i)}{2i} = \frac{1}{2} \pi^2 i$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R(R, -R)} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{\log(R) + i\theta}{1 + R^2 e^{2i\theta}} i R e^{i\theta} \right| d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{(\log(R) + \pi) R}{R^2 - 1} d\theta \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon(\epsilon, -\epsilon)} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{(|\log(\epsilon)| + \pi) \epsilon}{1 - \epsilon^2} d\theta$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos,

$$2 \int_0^\infty \frac{\log(x)}{1 + x^2} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \pi^2 i$$

Igualando as partes reais obtemos,

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1 + x^2} dx = 0$$

Soma de séries

Consideremos a função

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$$

que é analítica excepto para os polos simples $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ com resíduo $\frac{1}{n^2}$ e para o polo de ordem três na origem com resíduo $-\frac{\pi^2}{3}$. Consideremos o caminho γ_N que consiste da concatenação das arestas do quadrado S_N com vértices em $(\pm 1 \pm i)(N + \frac{1}{2})$ (ver figura 3.4.9). Note-se que os lados verticais não contêm polos de f .

Pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_{\gamma_N} f(z) dz = 2\pi i \left(2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} \right)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_N} f(z) dz \right| &\leq \sup_{z \in S_N} \left| \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} \right| l(\gamma_N) \\ &\leq \sup_{z \in S_N} |\cot(\pi z)| \frac{4(2N + 1)\pi}{(N + \frac{1}{2})^2} \end{aligned}$$

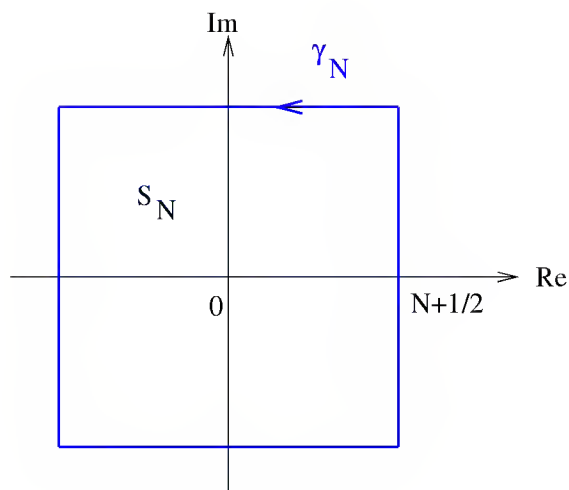


Figura 3.4.9:

Sobre as arestas horizontais $z = x \pm i(N + \frac{1}{2})$, temos

$$\begin{aligned}
 |\cot(\pi z)| &= \left| \frac{e^{i\pi[x \pm i(N + \frac{1}{2})]} + e^{-i\pi[x \pm i(N + \frac{1}{2})]}}{e^{i\pi[x \pm i(N + \frac{1}{2})]} - e^{-i\pi[x \pm i(N + \frac{1}{2})]}} \right| \\
 &\leq \frac{e^{\pi(N + \frac{1}{2})} + e^{-\pi(N + \frac{1}{2})}}{e^{\pi(N + \frac{1}{2})} - e^{-\pi(N + \frac{1}{2})}} \\
 &= \coth(N + \frac{1}{2})\pi \\
 &\leq \coth(\frac{3\pi}{2})
 \end{aligned}$$

porque a função $\coth(t)$ é decrescente para $t \geq 0$.

Sobre as arestas verticais $z = \pm(N + \frac{1}{2}) + iy$, temos

$$|\cot(\pi z)| = |\tan(i\pi y)| = |\tanh(\pi y)| \leq 1$$

Portanto, fazendo $N \rightarrow \infty$, obtemos

$$\left| \int_{\gamma_N} f(z) dz \right| \rightarrow 0$$

o que nos permite calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Este método pode ser aplicado a qualquer série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)$, em que ϕ é uma função racional, par e analítica excepto nos pontos $\pm 1, \pm 2, \dots$ e para a qual existem

$M, R > 0$ tais que $|\phi(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$ desde que $|z| > R$. Integrando a função $f(z) = \phi(z)\pi \cot(\pi z)$ ao longo do caminho γ_N e aplicando o teorema dos resíduos, obtemos a soma pretendida. Note-se que a função f tem polos simples nos pontos $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ com resíduo $\phi(n)$.

Exemplos diversos

- Para calcular o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)} dx$$

em que $(-1 < a < 1)$, consideremos a função

$$f(z) = a^z \operatorname{sech}(z)$$

que tem polos simples nos pontos $z = \frac{1}{2}(2n+1)\pi i$, $(n \in \mathbb{Z})$ e consideremos o caminho seguinte (ver figura [3.4.10](#))

$$\gamma = [-S, R] + [R, R + \pi i] + [R + \pi i, -S + \pi i] + [-S + \pi i, -S]$$

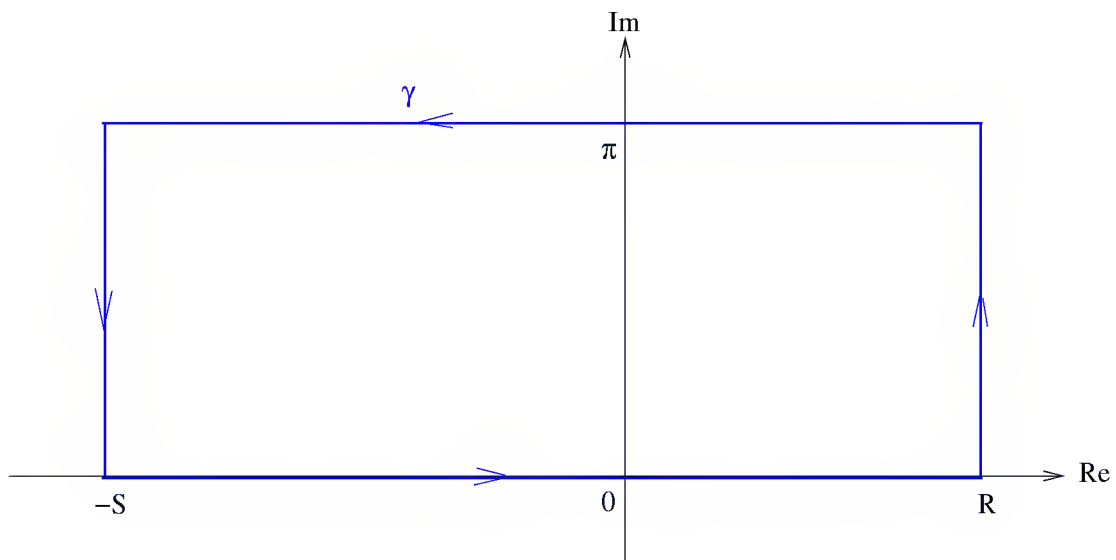


Figura 3.4.10:

Em $I(\gamma)$ a função f apresenta o polo $z = \frac{\pi i}{a}$ com resíduo dado por

$$\operatorname{res}\left(f, \frac{\pi i}{a}\right) = -ie^{\frac{a\pi i}{2}}$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos temos,

$$\begin{aligned} \int_{-S}^R \frac{e^{ax}}{\cosh(x)} dx + \int_0^\pi \frac{ie^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} dy &+ \int_R^{-S} \frac{e^{a\pi i} e^{ax}}{\cosh(x+\pi i)} dx \\ &+ \int_0^\pi \frac{ie^{a(-S+iy)}}{\cosh(-S+iy)} dy = 2\pi e^{\frac{a\pi i}{2}} \end{aligned}$$

Sejam I e J o segundo e o quarto integrais respectivamente. Então,

$$|I| \leq \int_0^\pi \frac{2e^{aR}}{|e^{(R+iy)} + e^{-(R+iy)}|} dy \leq \int_0^\pi \frac{2e^{aR}}{|e^R - e^{-R}|} dy$$

e sendo $a < 1$, fazendo $R \rightarrow \infty$ obtemos $I \rightarrow 0$.

$$|J| \leq \int_0^\pi \frac{2e^{-aS}}{|e^{-S} - e^S|} dy$$

e sendo $a > 1$, fazendo $S \rightarrow \infty$, obtemos $J \rightarrow 0$.

Portanto,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{\cosh(x)} dx = \frac{2\pi e^{\frac{a\pi i}{2}}}{1 + e^{a\pi i}} = \pi \sec\left(\frac{a\pi i}{2}\right)$$

- Para calcular o integral impróprio

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

consideremos a função $f(z) = e^{iz^2}$ e o caminho seguinte

$$\gamma = [0, R] + \gamma(R, Re^{\frac{i\pi}{4}}) + [Re^{\frac{i\pi}{4}}, 0]$$

como se mostra na figura 3.4.11

Pelo teorema de Cauchy temos,

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{i2t}} Rie^{it} dt + \int_R^0 e^{i(re^{\frac{i\pi}{4}})^2} e^{\frac{i\pi}{4}} dr = 0$$

Usando a desigualdade

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1, \quad (0 < t \leq \frac{\pi}{2})$$

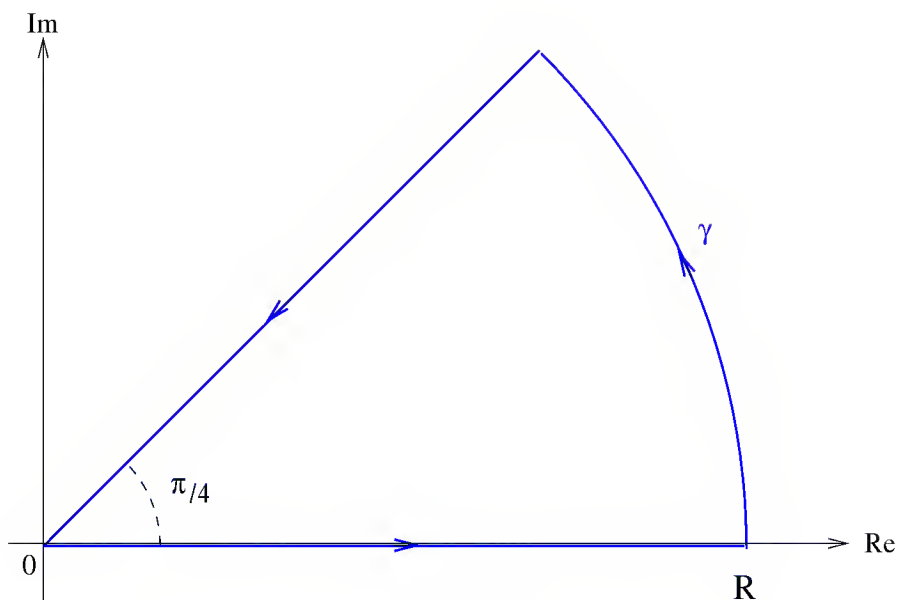


Figura 3.4.11:

podemos estimar o segundo integral

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{i2t}} R i e^{it} dt \right| &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin(2t)} dt \\
 &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{4R^2 t}{\pi}} dt \\
 &\leq \frac{\pi(1 - e^{-R^2})}{4R}
 \end{aligned}$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$ e tendo em conta que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, obtemos

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Igualando as partes reais,

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

- Para calcular o integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx ; \quad (0 < a < 1)$$

consideremos as funções

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z^{-a}}{z+1}; & |z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2} \\ f_2(z) &= \frac{z^{-a}}{z+1}; & |z| > 0, \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

e os caminhos γ_1 e γ_2 como se mostram nas Figuras (3.4.12) (3.4.13) e em que $\epsilon < 1 < R$.

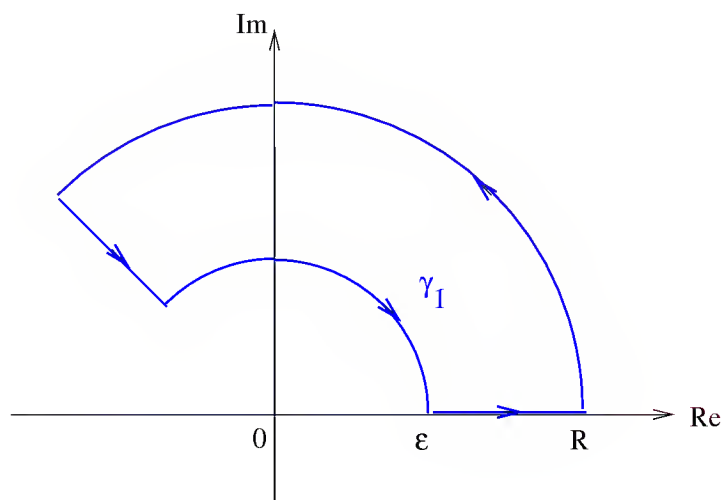


Figura 3.4.12:

Note-se que a função f_1 é analítica em $I(\gamma_1)$ e, portanto,

$$\int_{\gamma_1} f_1(z) dz = 0 \quad (3.4.10)$$

Por sua vez, a função f_2 apresenta um polo simples no ponto $z = -1$ em $I(\gamma_2)$. Por definição temos

$$f_2(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} = \frac{\exp[-a \operatorname{Log} |z| + i \arg z]}{z+1}$$

em que $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$.

O resíduo de f_2 em $z = -1$ é dado por

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f_2(z) = \lim_{z \rightarrow -1} z^{-a} = e^{-a\pi i}$$

e, portanto

$$\int_{\gamma_2} f_2(z) dz = 2\pi i e^{-a\pi i} \quad (3.4.11)$$

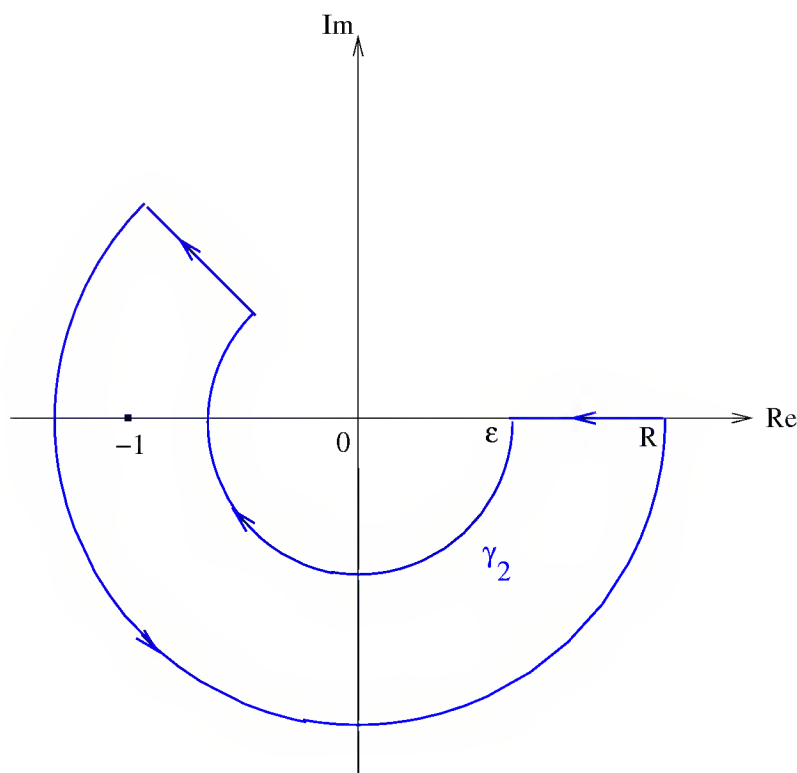


Figura 3.4.13:

Dado que $f_1(z) = f_2(z)$ sobre o segmento de recta no segundo quadrante temos,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f_1(z)dz + \int_{\gamma_2} f_2(z)dz &= \int_{\epsilon}^R f_1(x)dx - \int_{\epsilon}^R f_2(x)dx \\ &+ \int_{\Gamma_1} f_1(z)dz + \int_{\Gamma_2} f_2(z)dz + \int_{\gamma_{\epsilon 1}} f_1(z)dz + \int_{\gamma_{\epsilon 2}} f_2(z)dz \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

em que Γ_k é o arco de circunferência de raio R e $\gamma_{\epsilon k}$ é o arco de circunferência de raio ϵ que, como mostram as Figuras (3.4.12) (3.4.13), fazem parte do caminho γ_k ; ($k = 1, 2$).

Sobre Γ_k ; ($k = 1, 2$) temos

$$|f_k(z)| = \left| \frac{z^{-a}}{z+1} \right| \leq \frac{R^{-a}}{R-1}$$

ou seja,

$$\left| \int_{\Gamma_k} f_k(z)dz \right| \leq \frac{R^{-a}}{R-1} 2\pi R$$

e, portanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_k} f_k(z) dz = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (3.4.13)$$

Sobre γ_k temos

$$|f_k(z)| = \left| \frac{z^{-a}}{z+1} \right| \leq \frac{\epsilon^{-a}}{1-\epsilon}$$

ou seja,

$$\left| \int_{\gamma_k} f_k(z) dz \right| \leq \frac{\epsilon^{-a}}{1-\epsilon} 2\pi\epsilon$$

e, portanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_k} f_k(z) dz = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (3.4.14)$$

De (3.4.10), (3.4.11), (3.4.12), (3.4.13) e (3.4.14), obtemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\epsilon}^R f_1(x) dx - \int_{\epsilon}^R f_2(x) dx \right) = 2\pi i e^{-a\pi i}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^R f_1(x) dx - \int_{\epsilon}^R f_2(x) dx &= \int_{\epsilon}^R \frac{1}{x+1} [e^{-a \operatorname{Log}(x)} - e^{-a(\operatorname{Log}(x)+2\pi i)}] dx \\ &= \int_{\epsilon}^R \frac{x^{-a}}{x+1} (1 - e^{-2\pi a i}) dx \end{aligned}$$

que permite concluir

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{2\pi i e^{-a\pi i}}{1 - e^{-2a\pi i}}$$

e, portanto

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)} \quad (0 < a < 1)$$

3.5 Exercícios

1. Calcule os resíduos correspondentes aos polos da função $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z^3-1)}$
2. Calcule o resíduo em $z = 0$ de cada uma das funções seguintes:
 - a) $\operatorname{cosec}^2(z)$
 - b) $\frac{\operatorname{cosec}(z^2)}{z^3}$

c) $z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

3. Calcule o resíduo em $z = 1$ do ramo analítico da função

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1-z}$$

correspondente a

$$(2n-1)\pi < \arg(z) < (2n+1)\pi; \quad (n \in \mathbb{Z})$$

4. Calcule o integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^3(z+4)} dz$$

para os dois casos seguintes:

i) $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

ii) $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| = 3\}$

5. Para $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ calcule os integrais:

i) $\int_{\gamma} \tan(z) dz$

ii) $\int_{\gamma} \frac{1}{\sinh(2z)} dz$

6. Calcule os integrais:

a) $\int_{\gamma(0,8)} \frac{1}{1+e^z} dz$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+8\cos^2(t)} dt$

c) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(0,R)} \frac{p(z)}{q(z)} dz$, em que p e q são polinómios de grau m e n , respectivamente, tais que $m < n-1$.

7. Para $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ calcule os integrais:

i) $\int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z^2} dz$

ii) $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{cosec}(z)}{z} dz$

iii) $\int_{\gamma} z e^{\frac{1}{z}} dz$

8. Estabeleça as igualdades seguintes:

- a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{6}$
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(ax)}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \operatorname{sen}(a)$
- c) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \operatorname{sen}(t)} dt = \frac{2\pi}{3}$
- d) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a \cos(t)} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} ; \quad (-1 < a < 1)$
- e) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n}(t) dt = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} ; \quad (a > 1)$
- f) $\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$
- g) $\int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

9. Calcule o valor principal de cada um dos integrais seguintes:

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} dx$
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2 + 4x + 5} dx$

10. Calcule o integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx$$

considerando a função

$$f(z) = \frac{1 - e^{i2z}}{z^2}$$

e o caminho

$$\gamma_R(R, -R) + [-R, -\epsilon] + \gamma_{\epsilon}(-\epsilon, \epsilon) + [\epsilon, R]$$

11. Mostre que se tem

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

usando o teorema dos resíduos e o caminho

$$\gamma_R(R, Re^{i\frac{2\pi}{3}}) + [Re^{i\frac{2\pi}{3}}, 0] + [0, R]$$

12. Seja f uma função analítica excepto nos polos 1 e -1 de ordem dois com resíduos a e b , respectivamente. Além disso existem $M, R > 0$ tais que $|z^2 f(z)| \leq M$ para $|z| > R$. Prove que $a + b = 0$.
13. Prove que a equação $z^5 + 15z + 1 = 0$ tem precisamente quatro soluções no conjunto $\{z : \frac{3}{2} < |z| < 2\}$.
14. Prove que, para $n = 3, 4, 5, \dots$, o polinómio $z^n + nZ - 1$ tem n zeros no interior do círculo de centro na origem e raio $1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

Bibliografia

- [1] L. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw Hill, 3rd. ed., 1979.
- [2] J. Bak and D.J. Newman. *Complex Analysis*. Springer Verlag, 2nd. ed., 1996.
- [3] R.V. Churchill, J.W. Brown, and R.F. Verhey. *Complex Variables and Applications*. International Student Edition, 3rd. ed., 1974.
- [4] T. Needham. *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press, 1997.
- [5] H.A. Priestley. *Introduction to Complex Analysis*. Oxford Univ. Press, 1990.
- [6] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill, 3rd. ed., 1987.